

Saucisse de Hamming

Soit un langage régulier L sur un alphabet Σ . On définit la distance de Hamming d_H sur Σ^* par :

$$d_H(u, v) = |\{i \mid u_i \neq v_i\}|$$

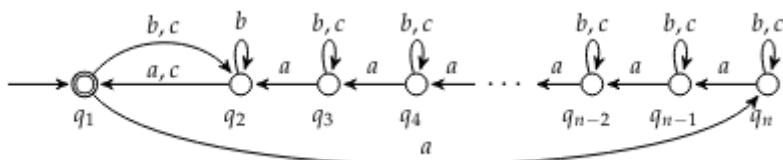
1. Montrer que d_H définit une distance sur Σ^* .

On définit $H(L, k)$ le langage des mots qui diffèrent d'au plus k lettres d'un mot de L .

2. Définir $H(L, k)$ en terme de la distance de Hamming.
3. Donnez un automate déterministe qui reconnaît $H(L, k)$.

Inversant

On définit $\mathcal{A}_n$ l'automate suivant :



Montrer que tout automate déterministe reconnaissant le miroir du langage reconnu par $\mathcal{A}_n$ a au moins 2^n états. On pourra utiliser, en le démontrant, que tout permutation sur X est engendré par un cycle de taille $|X|$ et une transposition de tous deux éléments consécutifs sur le cycle.

Ack

Un automate déterministe $\mathcal{A} = (\Sigma, Q, q_0, F, \delta)$ est dit synchronisant s'il existe un mot w et un état q tels que pour tout $p \in Q$, $\hat{\delta}(p, w) = q$. Pour tout $n \geq 3$, on définit l'automate $\mathcal{C}_n = ([1, n-1], \{a, b\}, 0, 1, \delta)$ où $\delta(0, a) = 1$ et $\delta(q, a) = q$ si $q \neq 0$ et $\delta(n-1, b) = 0$ et $\delta(q, b) = q+1$ sinon.

1. Montrer que le mot $(ab^{n-1})^{n-2}a$ de longueur $(n-1)^2$ synchronise $\mathcal{C}_n$.

En fait, on peut même montrer que ce mot est le plus court mot synchronisant pour $\mathcal{C}_n$. Plus généralement on appelle délai de synchronisation la longueur du plus court mot synchronisant. Cerny a émis la conjecture qu'un automate synchronisant a un délai de synchronisation d'au plus $(n-1)^2$. Cette conjecture est toujours ouverte, mais nous allons montrer une majoration moins ambitieuse. Dans la suite, pour P un ensemble d'état et w un mot, on définit $P \cdot w = \{q \in Q \mid \exists p \in P, \hat{\delta}(p, w) = q\}$

2. Donner un algorithme permettant de décider si un automate $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ est synchronisant. On pourra utiliser l'automate $\hat{\mathcal{A}}$ des parties donné par :

$$\hat{\mathcal{A}} = (\mathcal{P}(Q), \Sigma, Q, \{P \subseteq Q \mid |P| = 1\}, \Delta)$$

où $\Delta(P, a) = P \cdot a$.

3. Montrer qu'un automate est synchronisant si, et seulement si, pour toute paire p, p' d'états, il existe un mot w tel que $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\delta}(p', w)$.
4. En déduire un algorithme polynomial qui décide si un automate est synchronisant.
5. Soit $\mathcal{A}$ un automate synchronisant à n états et P un ensemble de ses états de cardinal k . Montrer qu'il existe w de longueur au plus $1 + \binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ tel que $|P \cdot w| < k$. En déduire que le délai de synchronisation de $\mathcal{A}$ est au plus $(n^3 - n^2)/3$.

Solution: Ack

- On remarque que $\delta(i, b) = i + 1 \bmod n$ si $i > 0$. Ainsi, pour tout i , $\hat{\delta}(i, b^{n-1}) = i - 1 \bmod n$. De ce fait, $\hat{\delta}(0, ab^{n-1}) = 0$ et pour tout $i \neq 0$, $\hat{\delta}(i, ab^{n-1}) = i - 1$. Par conséquent pour tout i , $\hat{\delta}(i, ab^{n-1}) = \max(i - 1, 0)$ donc $\hat{\delta}(i, (ab^{n-1})^{n-2}) = \max(i - (n - 2), 0)$. Si $i < n - 1$ on a alors $\hat{\delta}(i, (ab^{n-1})^{n-2}) = 0$ et donc $\hat{\delta}(i, (ab^{n-1})^{n-2} a) = 1$ alors que dans le cas $i = n - 1$, on a directement $\hat{\delta}(n - 1, (ab^{n-1})^{n-2}) = 1$ ce qui nous donne bien le résultat.
- L'automate $\hat{\mathcal{A}}$ accepte exactement les mots synchronisant $\mathcal{A}$. Il suffit alors de le construire puis de parcourir son graphe.
- Le sens direct est clair. Pour la réciproque, on se donne de tels mots $w_{p,p'}$. On montre alors par récurrence sur le cardinal de $P \subseteq Q$ qu'il existe w tel que $|P \cdot w| = 1$. Pour $|P| \leq 1$ le mot vide convient. Pour $|P| \geq 2$, on prend $p \neq p' \in P$. Alors, $|(P \cdot w_{p,p'})| < |P|$ et par hypothèse de récurrence, il existe w' tel que $|(P \cdot w_{p,p'}) \cdot w'| = 1$. Il est aisé de montrer que $(P \cdot u) \cdot v = P \cdot (uv)$.
- Il suffit de restreindre l'automate $\hat{\mathcal{A}}$ aux parties de cardinal au plus 2. Puisqu'il y a $|Q|^2$ telles parties, ceci peut être fait en temps polynomial.
- Pour trouver un mot w tel que $|P \cdot w| < k$, il suffit de trouver p, p' distincts dans P et w tel que $\hat{\delta}(p, w) = \hat{\delta}(p', w)$. On cherche donc un chemin C le plus court possible dans $\hat{\mathcal{A}}$ (restreint comme précédemment aux parties de cardinal inférieur à 2 comme dans la question précédente), depuis une partie de cardinal 2 incluse dans P vers un singleton. Les états intermédiaires de ce chemin sont nécessairement des parties $\{q, q'\}$ telles que $q \neq q'$ et $\{q, q'\} \not\subseteq P$, car sinon un chemin plus court que C existe. Il y a $\binom{n}{2} - \binom{k}{2}$ telles parties donc $|C| \leq 1 + \binom{n}{2} - \binom{k}{2}$. Pour la majoration, on considère l'algorithme suivant. On pose $P = Q$, puis tant que $|P| > 1$ on pose $P = P \cdot w$ avec w un mot de taille inférieure à $1 + \binom{n}{2} - \binom{|P|}{2}$ et tel que $|P \cdot w| < |P|$. Puisque la taille de P diminue d'au moins 1 à chaque étape, le délai de synchronisation d est alors tel que :

$$\begin{aligned}
 d &\leq \sum_{k=2}^n \left(1 + \binom{n}{2} - \binom{k}{2} \right) \\
 &= (n-1) \left(1 + \frac{n(n-1)}{2} \right) - \sum_{k=2}^n \frac{k(k-1)}{2} \\
 &= n-1 + \frac{n(n-1)^2}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{n(n+1)}{4} \\
 &= \frac{(n-1)(n^2-2n+3)}{3} \\
 &\leq \frac{n^3-n^2}{3} \text{ car } n \geq 2
 \end{aligned}$$