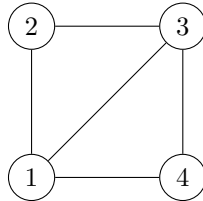


Jeu de Shannon

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. Si T_1 et T_2 sont deux arbres couvrants de G , on dit qu'ils sont disjoints s'ils n'ont aucune arête en commun.

1. Rappelez la définition (par trois propriétés équivalentes) du fait qu'un graphe soit un arbre.
2. Le graphe suivant possède-t-il deux arbres couvrants disjoints?



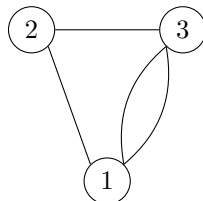
3. Soient T_1 et T_2 deux arbres couvrants de G . Si e_1 est une arête de T_1 , montrez qu'il existe une arête e_2 de T_2 telle que $T_1 - e_1 + e_2$ soit un arbre couvrant de G .

Pour P une partition de V , on note $|P|$ son cardinal et $\|P\|$ le nombre d'arêtes non incluses dans un des ensembles de P .

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrez que si G possède k arbres disjoints, alors pour toute partition P de V , $\|P\| \geq k(|P| - 1)$. On admettra la réciproque de ce fait.
5. Montrez que le problème co-PACKING-TREES de décision du fait que G possède k arbres couvrants disjoints est dans NP.

On considère un jeu à deux joueurs sur un graphe G non orienté avec plusieurs arêtes entre deux sommets. Les joueurs choisissent alternativement une arête non encore choisie. Si les arêtes de B forment un arbre couvrant de G , alors B gagne, sinon A gagne. A commence.

6. B a-t-il une stratégie gagnante sur



7. Montrez qu'il existe une stratégie gagnante pour B si et seulement si G a deux arbres couvrants disjoints. On pourra commencer par montrer que sinon, A a une stratégie gagnante.

Algorithme randomisé de médiane

On appelle *multi-ensemble* une collection d'objets où un même objet peut apparaître plusieurs fois.

On considère l'algorithme suivant qui tente de renvoyer la médiane d'un multi-ensemble S .

Input Multi-ensemble S de n entiers

Choisir un multi-ensemble R de $\lceil n^{3/4} \rceil$ éléments de S , tirés uniformément et indépendamment ;

Trier R ;

$d \leftarrow$ l'élément de rang $\lfloor \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n} \rfloor$ dans R ;

$u \leftarrow$ l'élément de rang $\lceil \frac{1}{2}n^{3/4} + \sqrt{n} \rceil$ dans R ;

Comparer tous les éléments de S à d et u ;

$C \leftarrow \{x \in S \mid d \leq x \leq u\}$;

$\ell_d \leftarrow |\{x \in S \mid x < d\}|$;

if $\ell_d > \frac{n}{2}$ **ou** $\ell_d + |C| \leq \frac{n}{2}$ **then**

return FAIL ;

if $|C| > 4n^{3/4}$ **then**

return FAIL ;

Trier C ;

return le $(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - \ell_d + 1)$ -ième élément de C ;

1. Montrer que cet algorithme s'exécute en temps $O(n)$ et que la sortie est soit FAIL, soit la médiane correcte de S .

On note

$$Y_1 = |\{r \in R \mid r \leq m\}| \quad \text{et} \quad Y_2 = |\{r \in R \mid r \geq m\}|.$$

On cherche à majorer la probabilité d'échec. L'événement FAIL est contenu dans la réunion des événements suivants :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \left[Y_1 < \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n} \right], \\ \mathcal{E}_2 &= \left[Y_2 < \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n} \right], \\ \mathcal{E}_3 &= \left[m \in C \text{ et } |C| > 4n^{3/4} \right]. \end{aligned}$$

2. Montrer que

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_1) = \mathbb{P}(\mathcal{E}_2) \leq \frac{1}{4}n^{-1/4} + O(n^{-1}).$$

On pose

$$\mathcal{E}_3^{(1)} = \left[|\{x \in C \mid x \leq m\}| > 2n^{3/4} \right], \quad \mathcal{E}_3^{(2)} = \left[|\{x \in C \mid x \geq m\}| > 2n^{3/4} \right].$$

3. Montrer que $\mathcal{E}_3 \subset \mathcal{E}_3^{(1)} \cup \mathcal{E}_3^{(2)}$.

Soit Z le nombre d'éléments de R parmi les $\lfloor \frac{n}{2} - 2n^{3/4} \rfloor$ plus petits éléments de S .

4. Montrer que

$$\mathcal{E}_3^{(1)} \subset \left[\ell_d \leq \frac{n}{2} - 2n^{3/4} \right] \subset \left[Z \geq \frac{n^{3/4}}{2} - \sqrt{n} \right].$$

Pour $i \in \{1, \dots, \lceil n^{3/4} \rceil\}$, on définit

$$Z_i = \mathbf{1}_{\{\text{le } i\text{-ième élément tiré appartient aux } \lfloor \frac{n}{2} - 2n^{3/4} \rfloor \text{ plus petits éléments de } S\}}.$$

5. Montrer que

$$p = \mathbb{P}(Z_i = 1) \leq \frac{1}{2} - 2n^{-1/4}.$$

6. Montrer que

$$\mathbb{E}(Z) \leq \left(\frac{n^{3/4}}{2} - \sqrt{n} \right) - (\sqrt{n} - S_n), \quad \text{où } S_n = \frac{1}{2} - 2n^{-1/4}.$$

7. Montrer que

$$\text{Var}(Z) \leq \frac{n^{3/4}}{4} + 1.$$

8. En déduire que

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_3^{(1)}) \leq \frac{1}{4}n^{-1/4} + o(n^{-1/4}).$$

9. En déduire que

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_3) \leq \frac{1}{2}n^{-1/4} + o(n^{-1/4}).$$

10. Conclure sur la probabilité d'échec de l'algorithme.

Solution: Algorithme randomisé de médiane

Let S be a multiset of n integers and let m denote its median. Let R be a multiset of size $n^{3/4}$ obtained by sampling independently and uniformly from S with replacement. Denote

$$Y_1 = |\{r \in R : r \leq m\}|, \quad Y_2 = |\{r \in R : r \geq m\}|.$$

1. Sorting R costs $O(n^{3/4} \log n)$. The comparison of all elements of S to d and u costs $O(n)$. If the algorithm does not fail, then $|C| \leq 4n^{3/4}$, so sorting C costs $O(n^{3/4} \log n)$. Hence the total running time is $O(n)$. If the algorithm does not return FAIL, then :

$$\ell_d \leq \frac{n}{2} \leq n - \ell_u,$$

so the median belongs to C . Moreover $|C|$ is small enough so that the returned element (the $(\lfloor n/2 \rfloor - \ell_d + 1)$ -th of C) is exactly the median of S . Thus the output is either FAIL or the correct median.

2. We have

$$Y_1 \sim \text{Bin}\left(n^{3/4}, \frac{1}{2}\right), \quad \mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{2}n^{3/4}.$$

Event

$$\mathcal{E}_1 = \{Y_1 < \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n}\}.$$

By Chebyshev's inequality :

$$\mathbb{V}(Y_1) = \frac{1}{4}n^{3/4},$$

so

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_1) = \mathbb{P}(|Y_1 - \mathbb{E}Y_1| \geq \sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{V}(Y_1)}{n} = \frac{1}{4}n^{-1/4}.$$

Thus

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_1) \leq \frac{1}{4}n^{-1/4}.$$

The same argument gives

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_2) \leq \frac{1}{4}n^{-1/4}.$$

3. Define

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_3^1 &= \{|\{x \in C : x \leq m\}| > 2n^{3/4}\}, \\ \mathcal{E}_3^2 &= \{|\{x \in C : x \geq m\}| > 2n^{3/4}\}. \end{aligned}$$

If $m \in C$ and $|C| > 4n^{3/4}$, then either more than $2n^{3/4}$ elements of C are $\leq m$ or more than $2n^{3/4}$ are $\geq m$. Hence

$$\mathcal{E}_3 \subset \mathcal{E}_3^1 \cup \mathcal{E}_3^2.$$

4. Let Z be the number of elements of R among the smallest $\lfloor n/2 - 2n^{3/4} \rfloor$ elements of S .
If $\ell_d \leq n/2 - 2n^{3/4}$, then the event $\mathcal{E}_3^1$ implies

$$Z \geq \frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n}.$$

5. Let

$$p = \mathbb{P}(Z_i = 1) = \frac{\lfloor n/2 - 2n^{3/4} \rfloor}{n} \leq \frac{1}{2} - 2n^{-1/4}.$$

6. We have

$$\mathbb{E}(Z) = n^{3/4}p \leq n^{3/4}\left(\frac{1}{2} - 2n^{-1/4}\right) = \frac{1}{2}n^{3/4} - 2\sqrt{n}.$$

7. Since Z is binomial,

$$\mathbb{V}(Z) \leq n^{3/4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}n^{3/4}.$$

8. Note that

$$\frac{1}{2}n^{3/4} - \sqrt{n} = \mathbb{E}(Z) + \sqrt{n}.$$

Hence

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_3^1) \leq \mathbb{P}(|Z - \mathbb{E}Z| \geq \sqrt{n}) \leq \frac{\mathbb{V}(Z)}{n} \leq \frac{1}{4}n^{-1/4}.$$

9. By symmetry,

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_3^2) \leq \frac{1}{4}n^{-1/4}.$$

Thus

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_3) \leq \mathbb{P}(\mathcal{E}_3^1) + \mathbb{P}(\mathcal{E}_3^2) \leq \frac{1}{2}n^{-1/4}.$$

10. The failure probability is bounded by

$$\mathbb{P}(\text{FAIL}) \leq \mathbb{P}(\mathcal{E}_1) + \mathbb{P}(\mathcal{E}_2) + \mathbb{P}(\mathcal{E}_3) \leq n^{-1/4}.$$

Therefore :

- The algorithm runs in $O(n)$ time.
- It returns either FAIL or the true median.
- The probability of failure is $O(n^{-1/4})$.