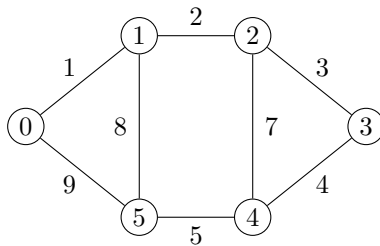


Problème de l'arbre de Steiner

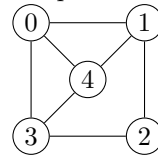
ARBRE DE STEINER

Entrée:	Un graphe pondéré non orienté connexe $G = (S, A, \omega)$ et un sous-ensemble $X \subset S$ de sommets dits terminaux.
Sortie:	Un arbre $T = (S', A')$ tel que $X \subset S' \subset S$.
Optimisation:	Minimiser le poids de l'arbre $\omega(T)$.

Graphe G_0 :



Graphe G_1 :



1. Résoudre le problème ARBRE DE STEINER pour le graphe G_0 et $X = \{0, 4, 5\}$.
2. Déterminer un algorithme résolvant le problème ARBRE DE STEINER. Déterminer sa complexité temporelle et spatiale.

ARBRE DE STEINER (DÉCI)

Entrée:	Un graphe non orienté connexe $G = (S, A)$, $X \subset S$ et $k \in \mathbb{N}$.
Question:	Existe-t-il un arbre $T = (S', A')$ de G tel que $X \subset S' \subset S$, $A' \subset A$ et $ A' \leq k$?

On appelle graphe d'incidence de $G = (S, A)$ le graphe $G_I = (S_I, A_I)$ tel que $S_I = S \cup A$ et $A_I = \mathcal{P}_2(S) \cup \{\{s, a\} \mid s \in S, a \in A, s \in a\}$.

3. Quel est le graphe d'incidence de G_1 ?
4. Montrer que G possède une couverture par sommets de taille k si et seulement si G_I possède un arbre de Steiner à $|A| + k - 1$ arêtes ayant A comme sommets terminaux.
5. En déduire la NP-complétude de ARBRE DE STEINER (DÉCI).

On considère désormais l'algorithme suivant :

- Construire $K = (X, \mathcal{P}_2(X), d)$ un graphe complet pondéré par les distances d dans G .
 - Construire $B = (X, A_B, d)$ un arbre couvrant de poids minimal de K .
 - Construire $H = (S', A_H, \omega)$ en remplaçant chaque arête de B par un chemin minimal dans G .
 - Renvoyer T un arbre couvrant de poids minimal de H .
6. Montrer que cet algorithme renvoie un arbre de Steiner couvrant X et déterminer sa complexité.
 7. Montrer que cet algorithme est une 2-approximation de ARBRE DE STEINER.

Solution: Problème de l'arbre de Steiner

1. Pour G_0 et $X = \{0, 4, 5\}$, on obtient l'arbre reliant les sommets via les arêtes de poids minimaux.
2. **Algorithme exact** : On parcourt les 2^n sous-ensembles $S' \subset S$. Pour chaque S' contenant X , on vérifie la connexité en $\mathcal{O}(n + |A|)$ et on calcule l'ACM en $\mathcal{O}(|A| \log n)$. **Complexité** : $\mathcal{O}(n^2 \log n \cdot 2^n)$ en temps et $\mathcal{O}(|S| + |A|)$ en espace.
3. Le graphe d'incidence G_I relie chaque arête $a \in A$ aux sommets $s \in S$ qui la composent.
4. **Preuve** : ($\Rightarrow$) Si C est une couverture de taille k , $C \cup A$ est connexe dans G_I car chaque $a \in A$ touche un $s \in C$. L'arbre couvrant a $|A| + k - 1$ arêtes. ($\Leftarrow$) Inversement, un arbre à $|A| + k - 1$ arêtes possède $|A| + k$ sommets. Comme les sommets de A sont indépendants, ils sont reliés à k sommets de S qui forment la couverture.
5. La réduction depuis COUVERTURE PAR SOMMETS est polynomiale et le problème est dans NP, d'où sa NP-complétude.
6. $X \subset S'$ par construction de H , et T est un arbre couvrant de H qui est connexe. **Complexité** : $\mathcal{O}(n^3)$ dominé par le calcul des distances (Floyd-Warshall ou Dijkstra répété).
7. Soit T^* l'arbre optimal. Un parcours de T^* passant deux fois par chaque arête a un poids $2\omega(T^*)$. Ce parcours induit un cycle hamiltonien dans K de poids $\geq d(B)$. Comme $\omega(T) \leq d(B)$, on a $\omega(T) \leq 2\omega(T^*)$.

Le problème du k -centre

Le problème du k -centre consiste à choisir k sommets (entrepôts) dans un graphe complet pondéré afin de minimiser la distance maximale d'un sommet quelconque à l'entrepôt le plus proche.

k -CENTRE

Entrée: Un graphe complet $K = (V, E)$, une fonction de poids w sur les arêtes, $k, b \in \mathbb{N}^*$.

Question: Existe-t-il $S \subseteq V$ tel que $|S| = k$ et $\forall v \in V, \min_{u \in S} w(v, u) \leq b$?

1. On définit le problème ENSEMBLE DOMINANT : un ensemble $C \subseteq V$ est dominant si tout sommet de V est dans C ou voisin d'un sommet de C . Soit $G = (V, E)$ un graphe. On construit $G' = (V', E')$ tel que $V' = V \cup E$ et $E' = E \cup \{(v, a) \mid v \in a \text{ dans } G\}$.
 - (a) Montrer que si S est une couverture de sommets de G , alors S est un ensemble dominant de G' .
 - (b) Montrer que si S' est un ensemble dominant de G' , il existe une couverture de sommets S de G telle que $|S| \leq |S'|$.
 - (c) En déduire que le problème de l'ensemble dominant est NP-complet.
2. Montrer que le problème du k -centre est dans NP.
3. Montrer que le problème du k -centre est NP-complet par réduction depuis l'ensemble dominant.
4. Montrer qu'il n'existe pas d'algorithme de $(2 - \varepsilon)$ -approximation pour le k -centre pour tout $\varepsilon > 0$, si $P \neq NP$.
5. Montrer que si $\alpha(n)$ est calculable en temps polynomial, il n'y a pas de $\alpha(n)$ -approximation pour k -CENTRE, sauf si $P = NP$.