

Question de Cours

Combien de q -bits faut-il pour écrire l'entier N en base q ?

Code sans préfixe et Kraft Dénombrable

Soit Σ un alphabet et Ω un ensemble au plus dénombrable. On rappelle qu'un code est une fonction $c : \Omega \rightarrow \Sigma^*$. Le code c est dit uniquement déchiffrable si pour tous $k, j \in \mathbb{N}^*$, et tous $u_1, \dots, u_k, v_1, \dots, v_j \in \Omega$, on a :

$$c(u_1) \star \dots \star c(u_k) = c(v_1) \star \dots \star c(v_j) \Rightarrow k = j, \forall i, u_i = v_i.$$

1. Montrez qu'un code sans préfixe (si $u \neq v$, $c(u)$ n'est pas un préfixe de $c(v)$) est uniquement déchiffrable. Est-ce que tout code uniquement déchiffrable est sans préfixe ?
2. Pourquoi peut-on représenter Σ^* comme un arbre $|\Sigma|$ -aire infini ? Définissez le sous-arbre de Σ^* associé à un code c (ou plutôt à $c(\Omega) \subseteq \Sigma^*$).
3. Montrez l'inégalité de Kraft :

$$\sum_{u \in \Omega} |\Sigma|^{-l(u)} \leq 1$$

ou $l(u) = |c(u)|$ et c est uniquement déchiffrable. On pourra commencer par le cas où Ω est fini.

4. Montrez la réciproque de l'inégalité : si l est une fonction entière sur Ω qui vérifie l'inégalité ci-dessus, alors il existe un code c sans préfixe pour lequel $l = |c|$.

Solution: Code sans préfixe et Kraft Dénombrable

Adapté du <https://drive.google.com/file/d/1M7FFmgWs3YTfSOWl31EP-0lhAzQGEcRR/view>.

Question de Cours

Rappelez la définition récursive des langages rationnels.

Langages Rationnels et Séries Génératrices

Soit Σ un ensemble fini. Pour $L \subseteq \Sigma^*$, on définit $l_n = |L \cap \Sigma^n| = |L_n|$.

1. Calculez la suite dans le cas du langage rationnel $\mathcal{L}$ sur $\{a, b\}$ des mots qui ne contiennent pas deux a consécutifs.
2. Montrez que $S(L) = \sum_{n \geq 0} l_n x^n$ converge pour $|x| < \frac{1}{|\Sigma|}$.

Une fonction de la forme $x \mapsto \sum u_n x^n$ est appelée une série entière. La série entière $S(L)$ ci-dessus est appelée série génératrice de L . Une série entière est dite rationnelle si c'est une fraction rationnelle en x .

3. Calculez la série génératrice de $\mathcal{L}$. On utilisera que $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ vérifie $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Quel est son degré ?
4. Vérifiez que si $|L| < +\infty$ alors $S(L)$ est rationnelle. Quel est son degré en tant que fraction rationnelle ?

Dans la suite on utilisera le langage OCaml.

5. Décrivez un type somme récursif qui modélise $\mathbb{R}[X]$. Décrivez un type enregistrement qui modélise $\mathbb{R}(X)$.
6. Décrivez une fonction efficace d'évaluation d'une fraction rationnelle en x . Quelle est sa complexité ?
7. Décrivez des opérations qui reprennent la structure de corps de $\mathbb{R}(X)$. Décrivez l'opération degré sur $\mathbb{R}(X)$.

S'il reste du temps :

8. Vérifiez plus généralement que la série génératrice d'un langage rationnel est rationnelle.

Solution: Langages Rationnels et Séries Génératrices

1. C'est la suite des nombres de Fibonacci.
2. Majoration du terme général par une suite géométrique de rapport < 1 .
3. $f_L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n z^n = \frac{1+z}{1-z-z^2}$
4. C'est un polynôme de degré $\max_n \{n \mid L_n \neq \emptyset\}$
5. Voir https://www.eleves.ens.fr/home/mpboyer/Recherche/Misc/gen_series_languages.pdf

Fonctorialité du Monoïde Libre

Dans la suite S, S' désigneront des ensembles et f une fonction de S vers S' . On rappelle qu'un monoïde est un ensemble muni d'une opération binaire associative et d'un élément neutre.

1. Expliquer pourquoi l'ensemble S^* des mots sur S définit un monoïde. On l'appelle le monoïde libre.
2. Montrez qu'on peut transporter f en un homomorphisme (fonction préservant l'opération du monoïde) f^* sur les monoïdes libres de S et S' .

Dans la suite, on utilisera le langage OCaml, sans utiliser de modules.

3. Définissez l'opérateur $\cdot^* : S \rightarrow S^*$. On pourra voir l'ensemble de départ comme un type.
4. Définissez l'opérateur $\cdot^* : S^{S'} \rightarrow (S^*)^{(S')^*}$.

S'il reste du temps :

5. Montrez que S^* est dénombrable si et seulement si S est dénombrable.
6. Montrez que $(S^*)^*$ et S^* sont isomorphes.
7. Montrez que $(\mathbb{N}, +, 0)$ est le monoïde libre sur un singleton.
8. Montrez que $S \simeq S'$ en tant qu'ensembles implique $S^* \simeq S'^*$ en tant que monoïdes.

Solution: Fonctorialité du Monoïde Libre

1. Clairement la concaténation est associative et a pour neutre le mot vide.
2. Il suffit de définir $f^*(a_1 \cdots a_n) = f(a_1) \cdots f(a_n)$.
3. On a $S^* \simeq \bigcup_n S^n$. Si S est dénombrable, alors S^* est au plus dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables (on attendra une preuve, sans besoin de mentionner l'axiome du choix).