

Kernelisation

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Pour $v \in V$, on note

$$N(v) = \{u \in V \mid uv \in E\}$$

le *voisinage ouvert* de v , et $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ son *voisinage fermé*. Pour $S \subseteq V$, on pose $N[S] = \bigcup_{v \in S} N[v]$ et $N(S) = N[S] \setminus S$. Le *degré* d'un sommet v est $\deg(v) = |N(v)|$. Un graphe $G = (V, E)$ est dit C_4 -*libre* s'il ne contient aucun cycle de longueur exactement 4 comme sous-graphe. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un sous-ensemble $D \subseteq V$ est un *ensemble dominant* de G si tout sommet de V appartient à D ou possède au moins un voisin dans D , c'est-à-dire $V = N[D]$.

Un *problème de décision paramétré* est un problème dont les instances sont des paires (x, k) où x est l'entrée et $k \in \mathbb{N}$ un paramètre. La *taille* d'une instance (x, k) est $|x| + k$.

Un *noyau* (ou *kernel*) de taille $f(k)$ pour un tel problème est un algorithme qui, en temps polynomial en $|x| + k$, transforme toute instance (x, k) en une instance équivalente (x', k') vérifiant :

- (x, k) est une instance positive si et seulement si (x', k') l'est,
- $|x'| \leq f(k)$ et $k' \leq k$.

Le noyau est dit *polynomial* si f est un polynôme.

On considère le problème Π suivant, paramétré par $k \in \mathbb{N}$: étant donné un graphe C_4 -libre G et un entier k , décider si G possède un ensemble dominant D avec $|D| \leq k$.

On cherche à montrer que Π admet un noyau polynomial, en construisant explicitement une instance réduite.

On pose $S = \{v \in V \mid \deg(v) \geq 2k + 1\}$ (l'ensemble des sommets de degré élevé) et $R = V \setminus N[S]$ (les sommets non dominés par S).

1. Soit $G = (V, E)$ un graphe C_4 -libre et $v \in V$ un sommet de degré au moins $2k + 1$. Soit D un ensemble dominant de G avec $|D| \leq k$. Montrer que $v \in D$. On pourra montrer que si $v \notin D$, au moins un voisin de v n'est pas dans $N[D]$. Utiliser ici que G est C_4 -libre.
2. En déduire : si $|S| > k$, alors $\Pi(G, k) = \text{NON}$.
3. On suppose désormais $|S| \leq k$. Montrer que si $\Pi(G, k) = \text{OUI}$, alors $|R| \leq 2k^2$. On pourra montrer qu'il n'y a pas d'arêtes entre S et R , et que tout sommet de $V \setminus S$ est de degré au plus $2k$.
4. Montrer que si $\Pi(G, k) = \text{OUI}$, alors $|N(R)| \leq 4k^3$. $N(S) \setminus N(R)$, et pour chaque sommet $v \in S$, on ajoute un sommet *fraîs* x_v adjacent uniquement à v . Majorer le nombre de sommets de G' par une fonction polynomiale de k , lorsque $\Pi(G, k) = \text{OUI}$.
5. Montrer que $\Pi(G, k) = \text{OUI}$ si et seulement si $\Pi(G', k) = \text{OUI}$. Pour chaque direction de l'équivalence, montrer comment transformer un ensemble dominant de l'un en ensemble dominant de l'autre.
6. En déduire un algorithme de kernélisation pour Π . Préciser sa complexité et la taille du noyau obtenu.

Matroïdes et optimalité gloutonne

Un matroïde est un couple $(E, \mathcal{I})$ où E est un ensemble fini et $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P}(E)$ est une famille de parties de E (appelées indépendantes) vérifiant :

(M1) $\emptyset \in \mathcal{I}$

(M2) Si $I \in \mathcal{I}$ et $J \subseteq I$, alors $J \in \mathcal{I}$ (hérédité)

(M3) Si $I, J \in \mathcal{I}$ avec $|I| < |J|$, alors $\exists e \in J \setminus I$ tel que $I \cup \{e\} \in \mathcal{I}$ (propriété d'échange)

1. Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. On définit $\mathcal{I} = \{F \subseteq E : F \text{ est acyclique}\}$. Montrer que $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde appelé (matroïde graphique).
2. Montrer que pour $U = \sqcup U_i$ et $\mathcal{I}$ l'ensemble des parties contenant au plus un élément dans chacun des U_i on définit un matroïde, dit matroïde de partition.
3. Montrer que l'ensemble des sous-familles libres d'une famille de vecteur est un matroïde.
4. Montrer qu'on peut remplacer la condition (M2) par l'une des deux conditions suivantes sans changer la définition :
 - (a) Pour $\tilde{U} \subset U$, tous les ensembles indépendants maximaux dans U ont même cardinal.
 - (b) Pour I, J indépendants tels que $|J \setminus I| = 2$ et $|I \setminus J| = 1$ il y a $x \in J \setminus I$ tel que $I + x$ est indépendant.
5. Soit une fonction de poids $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$. On considère l'algorithme glouton pour maximiser le poids d'un ensemble indépendant :
 - (a) $I_0 = \emptyset$
 - (b) $I_{n+1} = I_n \cup \operatorname{argmax}\{w(x) \mid x \in E \wedge I_n \cup \{x\} \text{ indépendant}\}$Montrer que cet algorithme retourne une solution optimale si et seulement si $(E, \mathcal{I})$ est un matroïde.
6. L'intersection de matroïdes est-elle un matroïde ?