

### Question de Cours

Rappelez la définition d'un arbre binaire et de sa hauteur.

### Cayley - Joyal

Dans la suite on considère un graphe orienté  $G$  avec un ensemble  $V$  de sommets et un ensemble  $E$  d'arêtes. On veut calculer le nombre d'arbres numérotés à  $n$  sommets. Pour ça, on va démontrer le théorème de Kirchoff. Un arbre couvrant d'un graphe orienté est un sous-ensemble de ses arêtes qui forme un arbre dont tout sommet d'origine est un noeud. On définit la matrice Laplacienne de  $G$  par :

$$(L)_{i,j} = \begin{cases} \deg(v_i) & i = j \\ -1 & i \neq j \wedge (v_i, v_j) \in E \\ 0 & \end{cases}$$

On définit  $M$  est la matrice d'incidence de  $G$  par

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1 & e_j = (\cdot, v_i) \\ -1 & e_j = (v_i, \cdot) \\ 0 & v_i \notin e_j \end{cases}$$

1. Montrer que  $L = M^t M$ .
2. Montrer que si  $G$  est connexe,  $m \geq n - 1$ .
3. Si  $B$  est une sous-matrice carré  $(n - 1) \times (n - 1)$  de  $M$ , alors soit le sous-graphe associé à  $B$  a un cycle et  $\det B = 0$  sinon  $\det B = \pm 1$ .
4. Soit  $M^*$  obtenue en supprimant une ligne quelconque de  $M$ . Le déterminant de  $M^* (M^*)^t$  est un cofacteur de  $L$  au signe près. Montrer le théorème de Kirchoff qui dit que le nombre d'arbres couvrants de  $G$  est égal à la valeur de n'importe quel cofacteur de  $L$ .
5. Donner la matrice laplacienne d'un graphe complet à  $n$  sommets  $K_n$  et en déduire que  $K_n$  a  $n^{n-2}$  arbres couvrants.

### Question de Cours

Rappelez la définition d'un arbre binaire équilibré. On détaillera notamment les notations utilisées.

### Distance, diamètre, hauteur

La distance entre deux sommets d'un graphe est le nombre d'arêtes minimal d'un chemin les reliant. Le diamètre d'un graphe est la distance maximale entre deux sommets du graphe.

1. Donnez un algorithme en  $\mathcal{O}(mn)$  calculant le diamètre d'un graphe. On précisera bien la manière de représenter le graphe.
2. Si  $G$  est connexe, montrez que pour tout sommet  $s$  de  $V$ , la hauteur de l'arbre de DFS depuis  $s$  est plus grande que la hauteur de l'arbre de BFS depuis  $s$ .
3. Montrez que le diamètre d'un graphe est toujours au plus deux fois la hauteur de l'arbre BFS du graphe.

### Question de Cours

Comparez les opérations suivantes entre un ensemble représenté par un tableau ordonné et un arbre binaire rouge-noir.

- Trouver le minimum.
- Ajouter un élément.

### Tom et Jerry

On considère le carré du plan  $[0, 1]^2$ . On y considère des ensembles de cercles définis par leur centre et leur rayon placés à l'intérieur. On cherche à savoir si une souris peut passer du point  $(0, 0)$  au point  $(1, 1)$  sans toucher les cercles.

1. Donnez un type OCaml permettant de représenter un point du plan et un cercle.
2. Définissez une fonction permettant de vérifier si deux cercles s'intersectent.
3. Donnez un algorithme se basant sur un graphe permettant de savoir s'il est possible d'aller de  $(0, 0)$  à  $(1, 1)$  sans toucher de cercles.
4. Implémentez en OCaml.

### Question de Cours

Rappelez la définition d'un arbre en tant que graphe.

### Arbres et degrés

On considère des graphes non-orientés.

1. Montrez que si  $|V| = n$ , les conditions suivantes sont équivalentes :
  - (a)  $G$  est un arbre ;
  - (b)  $G$  est connexe avec  $n - 1$  arêtes ;
  - (c)  $G$  est acyclique avec  $n - 1$  arêtes ;
  - (d) Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de  $T$  ;
  - (e)  $G$  est connexe et retirer toute arête de  $G$  le rend non-connexe ;
  - (f)  $G$  est sans cycle mais l'addition d'une arête crée exactement un cycle.
2. Montrez que  $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 |E|$ .
3. Montrez que  $G$  a un nombre pair de sommets de degré impair.
4. Combien d'arêtes a au maximum un graphe à  $n$  sommets ? Dessinez un graphe à 5 sommets qui a vérifie ce maximum.