

Circuits et Fonctions Booléennes

1. Rappelez les opérations logiques de l'algèbre de Boole. On rappellera notamment leur arité.
2. Proposez un type somme OCamL pour représenter une expression constante en algèbre de Boole.
3. Donnez une fonction en temps linéaire qui, a une expression constante, calcule sa valeur de vérité.
4. Donnez un type fonction booléenne en OCamL en vous basant sur votre type d'expression constantes. Les variables seront représentées par des identifiants entiers.
5. Donnez une fonction OCamL d'évaluation d'une fonction booléenne, qui prend en entier un tableau reprenant les valeurs des variables.
6. Donnez une fonction OCamL transformant une fonction booléenne en sa forme somme de produits.

Graphe en $\exists\text{SO}$

On s'intéresse à la théorie des graphes orientés, c'est à dire la logique du premier ordre avec égalité où le seul prédicat est une relation binaire E , qu'on note FO dans la suite.

1. Exprimer les propriétés suivantes en FO :
 - (a) le graphe est complet ;
 - (b) le graphe a un sommet isolé ;
 - (c) le graphe a au moins deux sommets de degré sortant 3 ;
 - (d) chaque sommet est connecté par une arête à un sommet de degré sortant 3.

Une formule de la logique $\exists\text{SO}$ est ou bien :

- une formule de la logique du premier ordre FO ;
- une formule de la forme $\exists x, \exists\text{SO}$;
- une formule de la forme $\exists X, \exists\text{SO}$ où X est un prédicat.

2. Exprimer en $\exists\text{SO}$ les propriétés suivantes :
 - (a) le graphe a un ensemble de sommets X tel qu'il n'y a pas d'arête entre deux sommets de X (on dit que X est indépendant) mais que tout sommet hors de X est connecté à au moins un sommet de X ,
 - (b) le graphe a un nombre pair de sommets ;
 - (c) un graphe à n sommets (n non fixé) admet un ensemble indépendant X de taille au moins $n/2$;
 - (d) le grpahe a un nombre pair d'arêtes ;
 - (e) un graphe à m arêtes (m non fixé) admet un sous-graphe biparti (graphe composé de deux ensembles de sommets indépendants de taille égale) avec au moins $m/2$ arêtes.

Logique Temporelle

Dans cet exercice, un mot $u \in \Sigma^*$ sur l'alphabet Σ est une suite finie d'éléments de Σ . On définit, pour toute lettre $a \in \Sigma$, un prédicat p_a qui permet de vérifier, étant donnée un mot u et une position i , si la lettre a est à la position i dans u .

On construit des formules à partir de ces prédicats avec les connecteurs booléens $\wedge, \vee, \neg$ et les connecteurs dits "temporels" X (juste après, unaire), G (désormais, unaire), F (un jour, unaire) et U (jusqu'à, binaire) :

- | | | |
|---------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1. VRAI | 4. $(\varphi \vee \psi)$ | 7. $(G \varphi)$ |
| 2. p_a | 5. $(\varphi \wedge \psi)$ | 8. $(F \varphi)$ |
| 3. $(\neg \varphi)$ | 6. $(X \varphi)$ | 9. $(\varphi U \psi)$ |

Étant donné un mot u et une formule φ , on définit pour $i \geq 0$, u satisfait φ au temps i , noté $(u, i) \models \varphi$ par induction :

- $(u, i) \models \mathbf{VRAI}$.
- $(u, i) \models p_a$ si et seulement si $a_i = a$.
- $(u, i) \models (\neg \varphi)$ si et seulement si on n'a pas $(u, i) \models \varphi$.
- $(u, i) \models (\varphi \vee \psi)$ si et seulement si $(u, i) \models \varphi$ ou $(u, i) \models \psi$.
- $(u, i) \models (\varphi \wedge \psi)$ si et seulement si $(u, i) \models \varphi$ et $(u, i) \models \psi$.
- $(u, i) \models (X \varphi)$ si et seulement si $(u, i+1) \models \varphi$. Notez que si $i = |u| - 1$, alors on ne peut avoir $(u, i) \models (X \varphi)$.
- $(u, i) \models (G \varphi)$ si et seulement si $(u, j) \models \varphi$ pour tout $i \leq j \leq |u| - 1$.
- $(u, i) \models (F \varphi)$ si et seulement si $\exists j$ tel que $i \leq j \leq |u| - 1$ et $(u, j) \models \varphi$.
- $(u, i) \models (\varphi U \psi)$ si et seulement si $\exists j$ tel que $i \leq j \leq |u| - 1$, $(u, j) \models \psi$ et $(u, k) \models \varphi$ pour tout k tel que $i \leq k < j$.

On notera $(u, i) \not\models \varphi$ si et seulement si on n'a pas $(u, i) \models \varphi$. On notera $u \models \varphi$ (et on dira alors que φ est vraie pour u) le fait que $(u, 0) \models \varphi$, et on notera $u \not\models \varphi$ le fait que $(u, 0) \not\models \varphi$.

- On pose $u = bbbcbbaa$. Pour chacun des énoncés ci-dessous dire s'il est vrai en justifiant brièvement votre réponse.
 - $(u, 4) \models G(p_a \vee p_b)$
 - $(u, 2) \models X(G(p_a \vee p_c))$
 - $(u, 1) \models F(G(p_a \vee p_b))$
 - $u \models (p_a \vee p_b)U(p_a \vee p_c)$
- Écrire une formule φ telle que $u \models \varphi$ si et seulement si u contient un a suivi plus tard d'un b . Par exemple on aura $ccaccbba \models \varphi$ tandis que $ccacccaa \not\models \varphi$.
- Écrire une formule Fin telle que $(u, i) \models Fin$ si et seulement si $i = |u| - 1$ (cest-à-dire si et seulement si i est l'indice de la dernière lettre de u).

Dans la suite, on pourra utiliser Fin comme une boîte noire.

- Écrire une formule φ telle que $u \models \varphi$ si et seulement si u se termine par un a .
- Écrire une formule φ telle que $u \models \varphi$ si et seulement si $u = ababab \dots ab$, cest-à-dire si et seulement si il existe $k \geq 1$ tel que $u = u_0 u_1 \dots u_{2k-1}$, et pour tout i tel que $0 \leq i \leq 2k - 1$, on a $u_i = a$ si i est pair et $u_i = b$ si i est impair.

Deux formules φ et ψ sont équivalentes, noté $\varphi \equiv \psi$ quand $u \models \varphi$ si et seulement si $u \models \psi$.

- Montrer que pour toutes formules φ, ψ , $\varphi U \psi \equiv \psi \vee (\psi \wedge (X(\varphi U \psi)))$.

On suppose que $\Sigma = \{a\}$ et on note a^i le mot composé de i a d'affilée. On note L_φ l'ensemble des mots u tel que $u \models \varphi$.

- Montrer qu'il n'existe pas de formule φ tel que $L_\varphi = \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

On pourra montrer que l'ensemble $E_\varphi = \{i \in \mathbb{N} \mid a^i \models \varphi\}$ est soit une partie finie de $\mathbb{N}$, soit la réunion d'une partie finie de $\mathbb{N}$ et un intervalle d'entier de la forme $k \geq n$.