

Graphe en $\exists\text{SO}$

On s'intéresse à la théorie des graphes orientés, c'est à dire la logique du premier ordre avec égalité où le seul prédicat est une relation binaire E , qu'on note FO dans la suite.

1. Exprimer les propriétés suivantes en FO :

- (a) le graphe est complet ;
- (b) le graphe a un sommet isolé ;
- (c) le graphe a au moins deux sommets de degré sortant 3 ;
- (d) chaque sommet est connecté par une arête à un sommet de degré sortant 3.

Une formule de la logique $\exists\text{SO}$ est ou bien :

- une formule de la logique du premier ordre FO ;
- une formule de la forme $\exists x, \exists\text{SO}$;
- une formule de la forme $\exists X, \exists\text{SO}$ où X est un prédicat.

2. Exprimer en $\exists\text{SO}$ les propriétés suivantes :

- (a) le graphe a un ensemble de sommets X tel qu'il n'y a pas d'arête entre deux sommets de X (on dit que X est indépendant) mais que tout sommet hors de X est connecté à au moins un sommet de X ,
- (b) le graphe a un nombre pair de sommets ;
- (c) un graphe à n sommets (n non fixé) admet un ensemble indépendant X de taille au moins $n/2$;
- (d) le graphe a un nombre pair d'arêtes ;
- (e) un graphe à m arêtes (m non fixé) admet un sous-graphe biparti (graphe composé de deux ensembles de sommets indépendants de taille égale) avec au moins $m/2$ arêtes.

contraposition

On considère la déduction naturelle avec en particulier les trois règles ci-dessous.

Implication Intro	Négation Intro	Négation Elim
$\begin{array}{c} [\varphi] \\ \vdots \\ \psi \\ \hline \varphi \rightarrow \psi \end{array} \rightarrow \text{Intro}$	$\begin{array}{cc} [\varphi] & [\varphi] \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \neg\psi \\ \hline \neg\varphi \end{array} \neg\text{Intro}$	$\begin{array}{cc} [\neg\varphi] & [\neg\varphi] \\ \vdots & \vdots \\ \psi & \neg\psi \\ \hline \varphi \end{array} \neg\text{Elim}$

1. Prouver les deux séquents suivants sans $\neg\text{Intro}$:

(a) $\neg(Q \rightarrow P) \vdash \neg P$ (3)

(b) $\vdash \neg(P \wedge \neg P)$ (5)

2. Montrer que toute application de $\neg\text{Intro}$ peut être supprimée.

Considérez la règle ci-dessous de contraposition :

$$\frac{\begin{array}{c} [\neg\varphi] \\ \vdots \\ \neg\psi \end{array}}{\varphi \rightarrow \psi} C$$

On note $\Gamma \vdash_C \varphi$ s'il y a une preuve de φ partant Γ dans la déduction naturelle avec la contraposition avec toutes les règles usuelles sauf $\rightarrow \text{Intro}$, $\neg\text{Intro}$ et $\neg\text{Elim}$.

On garde la notation $\Gamma \vdash \varphi$ s'il y a une preuve de φ à partir de Γ dans le système usuel.

3. Prouver

(a) Si $\Gamma \vdash_C \varphi$ alors $\Gamma \vdash \varphi$;

(b) $\neg\neg P \vdash_C \neg P \rightarrow \neg(Q \rightarrow Q)$ (1) ;

(c) $\neg P \rightarrow \neg(Q \rightarrow Q) \vdash_C (Q \rightarrow Q) \rightarrow P$ (2) ;

(d) $(Q \rightarrow Q) \rightarrow P \vdash_C P$ (2) ;

(e) $\neg\neg P \vdash_C P$ (4) ;

(f) $\neg\text{Elim}$ peut être remplacée par la contraposition et $\rightarrow \text{Elim}$

(g) $\rightarrow \text{Intro}$ peut être remplacée par la contraposition et $\neg\text{Intro}$

4. Montrer que si $\Gamma \vdash \varphi$ alors $\Gamma \vdash_C \varphi$.

Correction et Complétude

On se place dans le paradigme de la déduction naturelle.

1. Montrer que si $\Gamma \vdash \alpha$ alors $\Gamma \models \alpha$.

Soit $\Gamma = \{\alpha_0, \dots, \alpha_n\}$. On souhaite montrer que $\Gamma \models \beta$ implique $\Gamma \vdash \beta$. Soit t une valuation, on définit

$$\hat{p}_i = \begin{cases} p_i & \text{si } p_i^t = \top \\ \neg p_i & \text{sinon} \end{cases}$$

.

1. Si $\Gamma \models \beta$ alors $\emptyset \models (\alpha_0 \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta))))$.
2. Montrer que si γ contient des atomes $p_1, \dots, p_n$ alors, si $\gamma^t = \top$, $\{\hat{p}_i\} \vdash \gamma$ et sinon $\{\hat{p}_i\} \vdash \neg\gamma$.
3. Montrer que si $\emptyset \models \gamma$ alors $\emptyset \vdash \gamma$.
4. Si $\emptyset \vdash (\alpha_0 \rightarrow (\alpha_1 \rightarrow (\dots \rightarrow (\alpha_n \rightarrow \beta))))$, montrer que $\{\alpha_0, \dots, \alpha_n\} \vdash \beta$.
5. En déduire le résultat.

Logique Temporelle

Dans cet exercice, un mot $u \in \Sigma^*$ sur l'alphabet Σ est une suite finie d'éléments de Σ . On définit, pour toute lettre $a \in \Sigma$, un prédicat p_a qui permet de vérifier, étant donnée un mot u et une position i , si la lettre a est à la position i dans u .

On construit des formules à partir de ces prédicats avec les connecteurs booléens $\wedge, \vee, \neg$ et les connecteurs dits "temporels" X (juste après, unaire), G (désormais, unaire), F (un jour, unaire) et U (jusqu'à, binaire) :

- | | | |
|---------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1. VRAI | 4. $(\varphi \vee \psi)$ | 7. $(G \varphi)$ |
| 2. p_a | 5. $(\varphi \wedge \psi)$ | 8. $(F \varphi)$ |
| 3. $(\neg \varphi)$ | 6. $(X \varphi)$ | 9. $(\varphi U \psi)$ |

Étant donné un mot u et une formule φ , on définit pour $i \geq 0$, u satisfait φ au temps i , noté $(u, i) \models \varphi$ par induction :

1. $(u, i) \models \mathbf{VRAI}$.
2. $(u, i) \models p_a$ si et seulement si $a_i = a$.
3. $(u, i) \models (\neg \varphi)$ si et seulement si on n'a pas $(u, i) \models \varphi$.
4. $(u, i) \models (\varphi \vee \psi)$ si et seulement si $(u, i) \models \varphi$ ou $(u, i) \models \psi$.
5. $(u, i) \models (\varphi \wedge \psi)$ si et seulement si $(u, i) \models \varphi$ et $(u, i) \models \psi$.
6. $(u, i) \models (X \varphi)$ si et seulement si $(u, i+1) \models \varphi$. Notez que si $i = |u| - 1$, alors on ne peut avoir $(u, i) \models (X \varphi)$.
7. $(u, i) \models (G \varphi)$ si et seulement si $(u, j) \models \varphi$ pour tout $i \leq j \leq |u| - 1$.
8. $(u, i) \models (F \varphi)$ si et seulement si $\exists j$ tel que $i \leq j \leq |u| - 1$ et $(u, j) \models \varphi$.
9. $(u, i) \models (\varphi U \psi)$ si et seulement si $\exists j$ tel que $i \leq j \leq |u| - 1$, $(u, j) \models \psi$ et $(u, k) \models \varphi$ pour tout k tel que $i \leq k < j$.

On notera $(u, i) \not\models \varphi$ si et seulement si on n'a pas $(u, i) \models \varphi$. On notera $u \models \varphi$ (et on dira alors que φ est vraie pour u) le fait que $(u, 0) \models \varphi$, et on notera $u \not\models \varphi$ le fait que $(u, 0) \not\models \varphi$.

1. On pose $u = bbbcbbaa$. Pour chacun des énoncés ci-dessous dire s'il est vrai en justifiant brièvement votre réponse.
 - (a) $(u, 4) \models G(p_a \vee p_b)$
 - (b) $(u, 2) \models X(G(p_a \vee p_c))$
 - (c) $(u, 1) \models F(G(p_a \vee p_b))$
 - (d) $u \models (p_a \vee p_b)U(p_a \vee p_c)$
2. Écrire une formule φ telle que $u \models \varphi$ si et seulement si u contient un a suivi plus tard d'un b . Par exemple on aura $ccaccbba \models \varphi$ tandis que $ccacccaa \not\models \varphi$.
3. Écrire une formule Fin telle que $(u, i) \models Fin$ si et seulement si $i = |u| - 1$ (cest-à-dire si et seulement si i est l'indice de la dernière lettre de u).

Dans la suite, on pourra utiliser Fin comme une boîte noire.

4. Écrire une formule φ telle que $u \models \varphi$ si et seulement si u se termine par un a .
5. Écrire une formule φ telle que $u \models \varphi$ si et seulement si $u = ababab \cdots ab$, cest-à-dire si et seulement si il existe $k \geq 1$ tel que $u = u_0 u_1 \cdots u_{2k-1}$, et pour tout i tel que $0 \leq i \leq 2k - 1$, on a $u_i = a$ si i est pair et $u_i = b$ si i est impair.

Deux formules φ et ψ sont équivalentes, noté $\varphi \equiv \psi$ quand $u \models \varphi$ si et seulement si $u \models \psi$.

6. Montrer que pour toutes formules φ, ψ , $\varphi U \psi \equiv \psi \vee (\psi \wedge (X(\varphi U \psi)))$.

On suppose que $\Sigma = \{a\}$ et on note a^i le mot composé de i a d'affilée. On note L_φ l'ensemble des mots u tel que $u \models \varphi$.

7. Montrer qu'il n'existe pas de formule φ tel que $L_\varphi = \{a^{2^i} \mid i \in \mathbb{N}\}$.

On pourra montrer que l'ensemble $E_\varphi = \{i \in \mathbb{N} \mid a^i \models \varphi\}$ est soit une partie finie de $\mathbb{N}$, soit la réunion d'une partie finie de $\mathbb{N}$ et un intervalle d'entier de la forme $k \geq n$.