

La vieillesse

Tous les T ans, on effectue un recensement de la population d'un pays imaginaire par tranches d'âge. La première tranche d'âge contient les gens entre a_0 (inclus) et a_1 (exclus), et ainsi de suite jusqu'aux gens plus vieux que a_{n-1} .

Au premier recensement, on vous dit qu'il y a exactement p_i personnes dans la tranche d'âge débutant par a_i . Au second recensement, on vous dit qu'il y a exactement q_i personnes dans la tranche d'âge débutant par a_i .

Sachant que des gens peuvent quitter le pays et le rejoindre, calculer à partir des recensements le nombre de personnes qui sont arrivées et qui sont parties du pays. On attend une complexité temporelle en $\mathcal{O}(n)$.

Complétude Fonctionnelle

Un système de connecteurs est dit *fonctionnellement complet* si toute formule de la logique propositionnelle est équivalente à une formule ne s'écrivant qu'avec des connecteurs dudit système.

1. Montrer que $\{\Rightarrow, \perp\}$ est complet.
2. Montrer que $\{\neg, \wedge\}$ est complet.
3. Donner un connecteur logique binaire fonctionnellement complet.

Notons Val l'ensemble des valuations sur $\{p_1, \dots, p_n\}$.

4. Montrer que toute fonction $\text{Val} \rightarrow \{0, 1\}$ est la valeur de vérité d'une formule sur $\{p_1, \dots, p_n\}$.
5. Montrer que l'ensemble $\mathbb{F}_2 = \{\perp, \top\}$ muni de la conjonction et de la disjonction logique est un corps. Montrer que $\mathbb{F}_2^n$ est un groupe pour l'opérateur ou exclusif.

Définition Inductives et Points Fixes

Soit E un ensemble appelé univers. Une *définition inductive* d'une partie X de E consiste en

- Une partie non vide B de E ;
 - Un ensemble R de fonctions (possiblement partielles) $r_i : E^{n_i} \rightarrow E$ pour un certain n_i .
1. Montrer le premier théorème de point-fixe : à toute définition inductive correspond un unique plus petit ensemble X tel que : $B \subseteq X$ et pour tout $r \in R$ d'arité n , $r(X^n) \subseteq X$. On dit que X est défini inductivement.
 2. Donnez une définition inductive de $\mathbb{N}$ et de $2\mathbb{N}$.

Soit $X \subseteq E$ défini inductivement à partir de B et de R . Soit un prédicat $\mathcal{P}$ vérifié sur B et tel que si $r \in R$ est d'arité n et si $\mathcal{P}$ est vrai sur $x_1, \dots, x_n$ alors $\mathcal{P}$ est vrai sur $x = r(x_1, \dots, x_n)$.

3. Montrer que $\mathcal{P}$ est vrai sur X .
4. Montrer le second théorème de point-fixe : Tout ensemble défini inductivement à partir de B, R s'écrit $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ où $X_0 = B$ et $X_{n+1} = X_n \cup \bigcup_{r_i \in R} r_i(X_n^{n_i})$.
5. Soit X défini inductivement sans ambiguïté à partir de B, R . Montrer qu'une application f de X dans un certain ensemble Y est bien définie si on se donne la valeur de f sur B et la valeur de $f(r(x_1, \dots, x_n))$ en fonction de la valeur de $x_1, \dots, x_n$.

Solution : Définition Inductives et Points Fixes

<https://www.enseignement.polytechnique.fr/informatique/INF412/uploads/Main/chap2-goodINF412.pdf>