

Tikahwaukwa

Une machine de Mealy c'est un automate qui prend en entrée un mot et qui produit un mot en sortie via différentes transitions (c'est une sous-machine de Turing). Formellement, une machine de Mealy est un sextuplet

$$(Q, q_0 \in Q, A, B, \delta : Q \times A \rightarrow Q, \lambda : Q \times A \rightarrow B)$$

où :

- Q est un ensemble fini d'états
 - q_0 est l'état initial
 - A est l'alphabet d'entrée
 - B est l'alphabet de sortie
 - δ est une fonction de transition qui étant donné l'état actuel et la lettre lue renvoie le prochain état
 - λ est une fonction de transition qui étant donné l'état actuel et la lettre lue renvoie une lettre produite.
1. Dessinez la machine de Mealy qui produit la lettre a quand elle rencontre 01 et qui produit b sinon. Par exemple, 101 produit bba et 0101 produit $baba$.

On s'intéresse à une machine à café. Celle-ci indiquera $\aleph$ comme message d'erreur, ce qui la rend difficilement opérable... On vous donne une machine de Mealy, représentation du système de la cafetière. Une action qui n'entraîne pas une erreur est représentée par ν et une action qui entraîne la production d'un café est notée γ .

2. Décrire une structure de données pour implémenter une machine de Mealy.
3. Donnez un algorithme qui vérifie si un enchaînement d'actions sur la machine permet d'aboutir à un café.
4. Décrire et montrer une relation d'équivalence sur les états d'une machine de Mealy.
5. En déduire un algorithme de minimisation des machines de Mealy.

Solution: Tikahwaukwa

Les premières questions sont des adaptations d'algorithmes sur les automates. Pour les deux dernières questions, voir par exemple https://pageperso.lis-lab.fr/~jean-marc.talbot/Teaching/Archi/cours5_print.pdf

Tombé du ciel

Un graphe est dit *planaire* si on peut le représenter dans le plan euclidien sans que des arêtes ne se croisent. Formellement cela signifie qu'il existe $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $f : E \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)$ tel que $f(e_1)(t) \neq f(e_2)(t')$ pour toutes arêtes e_1, e_2 et temps t, t' . Une face F de G planaire est une région maximale du plan délimitée par un ensemble d'arêtes et qui n'en contient aucune. Pour montrer qu'un graphe est planaire, on le dessinera simplement. Le degré de F est le nombre d'arêtes de G qui bordent F .

1. Montrez que le graphe complet à 4 sommets est planaire. Quel est son nombre de faces ? Quels sont leurs degrés ?
2. Montrez que $\sum_{f \in \mathcal{F}} \deg(f) = 2|E|$. Montrez donc que $2|E| \geq 3|\mathcal{F}|$.
3. Montrez la formule d'Euler : $|V| - |E| + |F| = 2$.
4. Déduisez en que dans tout graphe planaire connexe :*

$$|V| \geq \frac{|E| + 6}{3}$$

5. Démontrez que le graphe complet à 5 sommets n'est pas planaire.
6. En déduire que dans tout graphe planaire il y a un sommet de degré inférieur ou égal à 5.

Un résultat très connu sur les graphes planaires est qu'ils sont tous 4-coloriables, résultat démontré en 1976 par Appel et Haken.

7. Montrez par récurrence sur le nombre de sommets, qu'un graphe planaire est 6-coloriable en temps polynomial.

Solution: Tombé du ciel

Pour les questions difficiles, voir <https://www.lri.fr/~jcohen/documents/enseignement/td-planaire-correction.pdf> La première question est juste un comptage des bords des faces.

Diagramme de Voronoï

On se place dans le plan affine $\mathbb{R}^2$. Soit S un ensemble fini de n points du plan. Les éléments de S sont appelés centres. On appelle région de Voronoï associée à un centre p de S l'ensemble des points qui sont plus proches de p que de tout autre point de S .

1. Montrez que si $H(p, q)$ est le demi-plan contenant p délimité par la médiatrice du segment $[pq]$ alors :

$$Vor_S(p) = \bigcap_{q \in S \setminus \{p\}} H(p, q)$$

2. Tracez le diagramme de Voronoï pour $S = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$.
3. Montrez qu'un point v du plan est un sommet d'un polygone de Voronoï si et seulement si c'est le centre d'un cercle passant par trois germes et ne contenant aucun autre germe dans sa surface.
4. Donnez une représentation d'un demi-plan affine par 3 points. En déduire une représentation d'une cellule de Voronoï.
5. Donnez un algorithme incrémental pour calculer un diagramme de Voronoï en $\mathcal{O}(n^2)$.
6. Donnez un algorithme récursif pour calculer un diagramme de Voronoï en $\mathcal{O}(n \log n)$.
7. Proposez un dernier algorithme, en balayant le plan de gauche à droite.

Solution: Diagramme de Voronoï

Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Diagramme_de_Vorono%C3%AF.