

Gentleman Cambrioleur

Vous êtes un voleur professionnel et vous comptez faire un casse dans une rue. Vous avez dérégulé les alarmes pour qu'elles ne sonnent que si deux maisons adjacentes sont cambriolées. Étant donné le montant d'argent disponible dans chaque maison, donnez le montant maximal d'argent que vous pouvez voler ce soir sans alerter la police.

Solution: Gentleman Cambrioleur

On donne la solution python ci-dessous :

```
def rob(self, nums: List[int]) -> int:
    prev_rob = max_rob = 0

    for cur_val in nums:
        temp = max(max_rob, prev_rob + cur_val)
        prev_rob = max_rob
        max_rob = temp

    return max_rob
```

Entiers Plus Grands

Étant donné une liste de n entiers. On veut, pour tout i , calculer le premier entier plus grand à gauche de la case d'indice i . On cherchera un algorithme en temps linéaire.

Entropie

Vous êtes opérateur radio et vous écoutez les communications d'un avion. Vous savez que celui-ci va faire parvenir un message codé. Pour cela, vous connaissez la probabilité p_i que l'avion transmette le caractère i pour i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Vous souhaitez trouver une mesure de l'information portée par un caractère donnée, pour essayer de repérer des motifs. Pour cela, vous cherchez une fonction $I(p)$ et avez trouvé 3 propriétés sur cette fonction :

- $I(p)$ est strictement décroissante en p : un évènement plus probable apporte moins d'information une fois observé.
 - $I(1) = 0$: les évènements qui arrivent toujours n'apportent aucune information.
 - $I(p_1 p_2) = I(p_1) + I(p_2)$: l'information apportée par deux évènements indépendants est la somme des informations apportées par chacun des évènements.
1. Déterminez la forme de la fonction I .
 2. Calculez $H(X) = \mathbb{E}[I(X)]$ où $X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Solution: Entiers Plus Grands

On maintient une pile avec les bons candidats en lisant de gauche à droite.

Solution: Entropie

1. On suppose que I est deux fois dérivable.

$I(p_1 p_2)$	$= I(p_1) + I(p_2)$	Par la propriété 3
$p_2 I'(p_1 p_2)$	$= I'(p_1)$	Dérivée par rapport à p_1
$I'(p_1 p_2) + p_1 p_2 I''(p_1 p_2)$	$= 0$	Dérivée par rapport à p_2
$I'(u) + u I''(u)$	$= 0$	Avec $u = p_1 p_2$
$(u I'(u))'$	$= 0$	En combinant les termes
$u I'(u) - k$	$= 0$	Par intégration

ce qui se résout en $I(u) = k \log(u) + c$. La propriété 2 donne $c = 0$. Puisque $p \in [0, 1]$ et $I(p) \geq 0$, on a $k < 0$.

2. On a $H(X) = 1$ par calcul direct.

Complexité

On dit que $f(n) \underset{n \rightarrow \infty}{=} \mathcal{O}(g(n))$ (ou $f = \mathcal{O}(g)$) si et seulement si le quotient $\frac{f(n)}{g(n)}$ est borné quand n tend vers l'infini.

1. Montrer que $f = \mathcal{O}(g)$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $\forall n, f(n) \leq C \cdot g(n)$.
2. Montrer que $\mathcal{O}$ est une relation transitive (c'est-à-dire que $f = \mathcal{O}(g)$, si $f = \mathcal{O}(g)$ et $g = \mathcal{O}(h)$ alors $f = \mathcal{O}(h)$).

On dit que $f = \Theta(g)$ si et seulement si il existe $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall n, C_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq C_2 \cdot g(n)$.

3. Montrer que $f = \Theta(g)$ si et seulement si $f = \mathcal{O}(g)$ et $g = \mathcal{O}(f)$.
4. Démontrez ou réfutez les affirmations suivantes :
 - (a) $f(n) + g(n) = \Theta(\min(f(n), g(n)))$.
 - (b) $g(n) - h(n) = \Theta(f(n))$ pour $g, h \in \Theta(f)$.

On définit $\log^*$ le logarithme itéré par :

$$\log^*(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ 1 + \log^*(\log(n)) & \text{sinon} \end{cases}$$

On dit que $f = o(g)$ si f/g tend vers 0 en $+\infty$.

5. Montrer que pour tout $\alpha < \beta$, $n^\alpha = o(n^\beta)$
6. Montrer que pour tout $\alpha > 0$, $\log^*(n) = o(n^\alpha)$.
7. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\log^*(n) = o(\log^{(k)}(n))$.

Solution: Complexité

Voir cours sur complexité plus tard.