

Question de Cours

Écrire 143 en binaire. Si on considérait son écriture comme un entier signé sur 8 bits, que vaudrait-elle ?

Sur les besoins en mémoire de l'écriture en différentes bases

Pour q un entier naturel strictement positif, on s'intéresse aux nombres de q -bits nécessaires pour représenter différents nombres. On ne s'intéresse pas à la facilité de création d'un q -bit et on suppose simplement qu'on dispose d'un composant informatique simple.

1. Combien de bits sont nécessaires pour représenter le nombre 15625 ? Combien de 5-bits ?
2. Plus généralement, montrer que $\lfloor \log_q(n) \rfloor$ q -bits sont suffisants pour représenter l'entier n en base q .
3. Comparer le nombre de bits et de 15625-bits pour représenter le nombre 4. De même pour le nombre 16644.
4. Plus généralement, quel est le ratio du nombre de bits nécessaires par 15625-bit ? Pourquoi utilise-t-on la base 2 ?
5. Proposer une explication de l'intérêt d'utiliser la base 3. On s'appuiera sur une argumentation similaire à celle pour l'utilisation de la base 2.
6. Quelles bases pourrait-on utiliser pour éviter la volatilité de la base 2 ?

Solution: Sur les besoins en mémoire de l'écriture en différentes bases

1. On a $15625 \leq 16383 = 2^{14} - 1$ donc 14 bits sont nécessaires. On a : $15625 = 5^6$ donc 7 5-bits sont nécessaires.
2. On a deux choix :
 - Ou bien $\log_q(n) \in \mathbb{N}$ auquel cas $n = q^k$ pour un entier k et il faut $k + 1$ q -bits pour le représenter en mémoire.
 - Ou bien $\lfloor \log_q(n) \rfloor < \log_q(n)$ auquel cas $q^{k-1} < n \leq q^k - 1$ et il faut k q -bits pour le représenter en mémoire.
3. Il faut 3 bits et 1 15625-bit pour représenter 4. Il faut 14 bits mais 2 15625-bits pour représenter 16644.
4. Il faut 14 bits par 15625-bit. On utilise la base 2 pour les liens avec la logique et les booléens, ce qui permet de faire facilement des tests de vérité. *Par ailleurs, il est très facile de faire une porte logique à deux états avec de l'électricité. L'interrupteur est-il ouvert ou fermé ?*
5. Ceci permet de gérer la logique à 3 états, qui permet de résoudre les problèmes d'asynchronicité ou de non-connaissance de la valeur de vérité d'une proposition. Par exemple, on ne sait pas si π contient toute suite finie de nombres dans son développement en une base fixée, donc on peut le représenter par une troisième valeur de vérité. *On s'accorde à dire que c'est probable*
6. On pourrait utiliser la base 16 pour représenter une valeur de vérité, ce qui permet de limiter les *bitflips* (changement spontané de valeur d'un bit). Toutefois, ceci est plus lent (16 fois plus lent), et ne résout pas le problème pour la représentation des entiers.

Question de Cours

Écrire 189 en binaire. Si on considérait son écriture comme un entier signé sur 8 bits, que vaudrait-elle ?

Commensurabilité

On dit que deux entiers B et β sont exponentiellement-commensurables si ils sont tous deux des puissances d'une même base.

1. Montrer que deux entiers B et β sont commensurables si et seulement si :

$$\frac{\ln(B)}{\ln(\beta)} \in \mathbb{Q}$$

2. Relier changement de base de représentation des entiers et changement de base en logarithme.
3. Montrer que si B et β sont commensurables, on peut passer de la représentation d'un entier en base B à celle en base β plus *efficacement*^a que si B et β ne le sont pas.
4. Coder une fonction qui fait ce changement efficace et dans le cas général.

a. On verra plus tard dans l'année ce que signifie *efficacement*

Solution: Commensurabilité

1. Si $B = a^k$ et $\beta = a^l$, on a :

$$\frac{\ln(B)}{\ln(\beta)} = \frac{\log_a(B) \ln(a)}{\log_a(\beta) \ln(a)} \\ = k/l \in \mathbb{Q}$$

2. Voir écriture dans l'équation précédente.
3. Avec les notations précédentes, il suffit de faire une séparation des B -bits en k a -bits que l'on regroupe en l a -bits pour former des β -bits. Il suffit alors de compléter pour obtenir le bon nombre de bits. On effectue au plus 2 opérations par bit. L'opération dans le cas non commensurable est plus complexe, il faut effectuer des divisions euclidiennes, ce qui est bien plus lourd.
- 4.

Question de Cours

Écrire 254 en binaire. Si on considérait son écriture comme un entier signé sur 8 bits, que vaudrait-elle ?

Recollement de la droite Réelle

On rappelle que le cercle unité peut être défini comme :

$$\mathbb{S}^1 = \{(\cos(\arctan(\theta)), \sin(\arctan(\theta))) \mid \theta \in \mathbb{R}^+\}$$

On va s'intéresser à des manières de représenter des points du cercle unité en mémoire.

1. Montrer que représenter exactement un point en mémoire sur le cercle unité est équivalent à représenter exactement un réel quelconque.
2. En déduire une première représentation d'un point sur le cercle unité. Quelle est son défaut ?

On rappelle que le cercle unité peut aussi être défini comme :

$$\mathbb{S}^1 = \{(\cos(\theta), \sin(\theta)) \mid \theta \in [0, 2\pi[\}$$

3. Quelle est la distance sur le cercle unité entre $(\cos(\theta_1), \sin(\theta_1))$ et $(\cos(\theta_2), \sin(\theta_2))$ si θ_1 et θ_2 sont entre 0 et 2π .
4. En déduire une représentation en mémoire du cercle unité avec une précision de $\frac{\pi}{256}$.
5. Quels problèmes cette représentation poserait-elle ?
6. Proposer une méthode plus précise en se rappelant du théorème de Pythagore.

Solution: Recollement de la droite Réelle

1. Le cercle est en bijection avec $\mathbb{R}^+$ qui est en bijection avec $\mathbb{R}$.
2. Représenter les points du cercle par le paramètre θ demande un nombre infini de bits pour atteindre le bout du cercle : il faut $\log_2(\tan(\alpha))$ bits pour représenter le point d'angle α pour $\alpha < 2\pi$, ce qui tend vers $+\infty$ quand $\alpha \rightarrow 2\pi$.
3. C'est $|\theta_1 - \theta_2|$ par définition du radian.
4. On représente les points par un entier sur 8 bits multiplié par $\frac{2\pi}{2^8} = \frac{\pi}{128}$. La question précédente nous assure qu'on a bien une erreur maximale d'arrondi sur le cercle de $\frac{\pi}{256}$.
5. Cette représentation en mémoire nécessite un fort appel au contexte et des difficultés de programmation, mais facilite les opérations de découpage du cercle.
6. On pourrait représenter les points du cercle par le triangle qu'ils représentent. Connaître le signe du sinus et du cosinus ainsi que la valeur d'un des deux suffirait. On ne doit alors représenter que 2 booléens (donc 2 bits) et un réel entre 0 et 1. On gagne ainsi en précision pour un même nombre de bits.