Séries et Géométrie

Matthieu Boyer

Cours TalENS 4 2025-2026

Table des matières

L'objectif de ce cours va être d'étudier une classe d'objets : les séries numériques réelles.

1 Notion de Série

1.1 Des suites aux séries

Définition 1.1 Une série (réelle) est une suite réelle définie à partir d'une autre suite : la série de terme général u_n est la suite de terme général $\sum_{k=0}^{n} u_k$, somme des n premiers termes de la suite u_n.

Proposition 1.2 L'ensemble des séries et l'ensemble des suites sont égaux.

Démonstration. En effet, on peut définir toute suite de terme général u_n par la série de terme général $u_k - u_{k-1}$ pour $k \geq 1$ et de premier terme u_0. ■

Définition 1.3 Pour S, S' deux séries de deux séries de terme généraux a_n et b_n, on définit

- La somme $S + S'$ comme la somme des suites sous-jacentes (de manière équivalente, la série dont le terme général est la somme des termes généraux de S et S') ;
- Le produit λS de S par λ comme le produit par λ de la suite sous-jacente (de manière équivalente, la série dont le terme général est le produit par λ du terme général de S) ;
- Le produit $S \times S'$ comme la série de terme général

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

1.2 Convergence absolue ou non

Définition 1.4 Une série converge si et seulement si la suite sous-jacente converge.

Une série de terme général u_n converge absolument si et seulement si la série de terme général $|u_n|$ converge.

Une série est dite semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Proposition 1.5 La série de terme général $\frac{1}{n}$ diverge.

Définition 1.6 Si une série S de terme général u_n converge, on note $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$.

Proposition 1.7 Soient S et S' deux séries convergentes. Alors

- $S + S'$ converge vers $S + S'$;
- λS converge vers λS pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;
- SS' converge vers SS'.

Si u_n et v_n définissent deux suites, alors on note :

- $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ quand $u_n \leq C v_n$ pour $C \geq 0$ et n suffisamment grand ;
- $u_n \sim v_n$ quand $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.

Proposition 1.8 Soient S et S' deux séries de termes généraux u_n et v_n respectivement :

- Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, alors la convergence de S' implique celle de S ;
- Si $u_n \sim v_n$ alors S et S' ont même nature.

Proposition 1.9 — Comparaison Série-Intégrale. La série de terme général $f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_0^{+\infty} f$ converge.

2 Exemples et Calculs

2.1 Séries exprimables

Définition 2.1 La série géométrique de paramètre q est la série de terme général q^n.

Proposition 2.2 La série géométrique de paramètre q converge vers $\frac{1}{1-q}$ si et seulement si $|q| < 1$.

Démonstration. On a un télescopage

$$\sum_{n=0}^{N} q^n = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q},$$

d'où le résultat. ■

Définition 2.3 La série de terme général $\frac{x^n}{n!}$ est appelée série exponentielle, est absolument convergente et on note e^x sa limite.

2.2 Interlude sur Zeta

Définition 2.4 On définit $\zeta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. C'est une fonction bien définie et dérivable à l'infini pour $s > 1$.

Démonstration. On utilise le théorème de comparaison série-intégrale pour obtenir le critère de Riemann. ■

Proposition 2.5 On a $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

2.3 Séries de Taylor

Définition 2.6 Soit f une fonction dérivable à l'infini en 0. Sa n-ème approximation de Taylor en 0 est donnée par

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

On dit que f est définissable en série de Taylor si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Proposition 2.7 Les fonctions $\exp, \ln(1+x), \cos, \sin, \arccos, \arcsin$ et $\arctan$ sont définissables en série de Taylor en 0, avec

- $\exp x = \sum \frac{x^n}{n!}$;
- $\ln(1+x) = \sum \frac{(-1)^n}{n} x^n$;
- $\cos x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$;
- $\sin x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
- $\arctan x = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

2.3.1 Calcul de Séries

En vrac :

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}$$
$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \cdots = e$$

2.4 Séries Génératrices

Définition 2.8 Soit u_n une suite. La série génératrice des u_n est la série de terme général $u_n x^n$. Elle définit la fonction génératrice des u_n sur son domaine de convergence.

Définition 2.9 La dérivée formelle de la série génératrice des u_n est la série (génératrice) de terme général $(n+1)u_{n+1}x^n$ (des $(n+1)u_{n+1}$).

Proposition 2.10 Sur son domaine de convergence, la fonction génératrice de la dérivée formelle d'une série génératrice correspond avec la dérivée au sens classique de la fonction génératrice.

Ce résultat, cas particulier d'une version plus générale, permet de reconnaître aisément

Proposition 2.11 Considérons deux variables aléatoires (X, Y) uniformément distribuées sur $[0, 1]$. La probabilité que la partie entière du quotient Y/X soit paire est $\frac{1}{2}(2 - \ln(2))$

Démonstration. Observons que choisir X, Y tel que précisé ci-dessus revient à choisir uniformément un point du carré unité $[0, 1] \times [0, 1]$. Notons de plus que $\lfloor Y/X \rfloor$ vaut exactement $2n \in \mathbb{N}$ si et seulement si le point X, Y est dans le triangle entre les points $(0,0)$, $(1/n,1)$ et $(1/(n+1),1)$. Calculer la probabilité souhaitée revient donc à calculer l'aire totale recouverte par ces triangles ainsi qu'à la partie $Y < X$ du carré.

Ce triangle a pour aire

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \times 1 \times 1/2$$

On vérifie notamment que, ces triangles recouvrant la partie $Y > X$ du carré, la série de leurs aires vaut $1/2$.

Pour notre problème, on ne s'intéresse qu'aux valeurs de n paires, c'est à dire $n = 2k$. On a alors la série suivante pour calculer la probabilité recherchée

$$\begin{aligned}
p &= \frac{1}{2}\left(\underbrace{1}_{\text{Région } Y<X} + \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{\text{Région } 3X>Y>2X} + \underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}_{\text{Région } 5X>Y>4X} + \cdots\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}}_{=\ln(1+x)(1)}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1 - \ln 2)
\end{aligned}$$

■