Cours TalENS 2023-2024

Polynômes et Méthodes Graphiques

Matthieu Boyer

30 janvier 2024

Table des matières

1 Formalisme !

1.1 Polynômes sur un Corps

Définition 1.1: Corps

Un corps est un ensemble muni :

- D'une addition avec un neutre 0 notée + : $(x, y) \mapsto x + y<$
- D'une multiplication avec un neutre 1 notée $\times$: $(x, y) \mapsto xy$ distributive sur l'addition

Pour laquelle tout élément (sauf 0) est inversible pour la multiplication et la loi de produit nul est vérifiée.

On notera $\mathbb{K}$ un tel ensemble. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ sont des corps.

Définition 1.2: Polynôme sur $\mathbb{K}$

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{K}$.

On les note sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

On appelle le symbole X l'indéterminée. Ce n'est pas un nombre. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle d le degré de P.

Proposition 1.1: Opérations

Si $P = \sum_{i=0}^{d_1} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{d_2} b_j X^j$ sont deux polynômes :

- $P + Q = \sum_{i=0}^{\max(d_1,d_2)} (a_i + b_i) X^i$ est un polynôme de degré $\leq \max(\deg P, \deg Q)$.
- $X^k P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{i+k}$ est un polynôme.
- En particulier, PQ est un polynôme de degré $\deg P + \deg Q$ et si $k \in \mathbb{N}$, P^k est un polynôme.

Définition 1.3: Composition

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha) \in \mathbb{K}$ le nombre : $\sum_{i=0}^{d_1} a_i \alpha^i$. On note de plus $P \circ Q$ le polynôme

$$P \circ Q = \sum_{i=0}^{d_1} a_i Q(X)^i$$

On a $\deg P \circ Q = \deg P \times \deg Q$.

La fonction $\tilde{P} : \alpha \mapsto P(\alpha)$ est continue.

Définition 1.4: Polynômes à Plusieurs Indéterminées

Un polynôme à $k+1$ indéterminées est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_k]$

Remarque 1.1: Intégrité

En réalité, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas un corps, mais seulement un anneau intègre.

P se met sous la forme

$$P(X) = \sum_{i_1=0}^{d_1} \sum_{i_2=0}^{d_2} \ldots \sum_{i_k=0} \alpha_{i_1,\ldots,i_k} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \ldots X_k^{i_k}$$

1.2 Equations Polynômiales et Applications

Définition 1.5: Equation Polynômiale

Une équation polynômiale est une équation de la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = b$$

On peut se restreindre au cas $b = 0$ en enlevant b à P.
On appelle *racines* de l'équation les éléments de $\{\alpha \mid P(\alpha) = b\}$. On dit que $d = \deg P$ est le degré de l'équation. Pour k indéterminées, on remplace x par un k-uplets $x_1, \ldots, x_k$

Proposition 1.2: Nombres de Solution

Une équation définie par P a au plus $\deg P$ solutions

Théorème 1.1: D'Alembert Gauss

Une équation polynômiale définie par P a toujours exactement $\deg P$ solutions sur un corps algébriquement clos. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

Définition 1.6: Droite

Une droite est un ensemble de la forme $D(a,b) = \{ax+b \mid x \in \mathbb{R}\}$

En particulier, si on a deux droites $D(a,b), D(a',b')$, leur intersection est définie par l'ensemble

$$\{ax+b = a'x+b'\} = \{(a-a')x + (b-b') = 0\}$$

Définition 1.7: Cercle

Un cercle est un ensemble de la forme $C((x_0,y_0),r) = \left\{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\right\}$

De la même manière que pour les droites, on peut vérifier que les points à l'intersection de deux cercles sont solutions d'une équation polynomiale.

2 Algorithmes

2.1 Analyse des Algorithmes

Définition 2.1: Complexité

On appelle complexité en temps d'un algorithme le nombre d'opérations nécessaires à l'effectuer.

La complexité est une notion de vitesse d'un algorithme.

Définition 2.2: Notation de Landau

On dit que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si il existe c tel que $\frac{u_n}{v_n} \leq c$ pour tout n.

La notation `grand O` est une notion de vitesse de croissance.

Proposition 2.1: Croissances Comparées

- On a $\alpha^n = \mathcal{O}(\beta^n)$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$
- On a $n^\alpha = \mathcal{O}\left(n^\beta\right)$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$
- A l'inverse $n^\alpha = \mathcal{O}\left(n^\beta\right)$ avec $\alpha \leq \beta \leq 0$
- On a $\log n \leq n^\alpha$ si $\alpha > 0$.

Proposition 2.2: Opérations

Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$

- Si $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ on a $u_n = \mathcal{O}(w_n)$
- $\lambda u_n = \mathcal{O}(v_n) = \mathcal{O}(\lambda v_n)$
- Si $w_n = \mathcal{O}(z_n)$ on a : $u_n + w_n = \mathcal{O}(v_n + z_n)$.
- $u_n = \mathcal{O}(u_n)$.

2.2 Algorithmes sur les Polynômes

Algorithme	Analyse
Input $P = (a_0, \dots, a_n)$, $Q = (b_i, \dots, b_n)$ Calculer les sommes $a_i + b_i$ **return** $P + Q = (a_0 + b_0 \dots a_n + b_n)$	On effectue n additions, on a une complexité en $\mathcal{O}(n)$.

Algorithme	Analyse

Input $P = (a_0, \dots, a_n)$
$Q = (b_i, \dots, b_n)$
Définir PQ la liste vide
for $i = 0$ à n **do**
    for $j = 0$ à n **do**
        $PQ[i+j] \leftarrow PQ[i+j] + a_i b_j$
    end for
end for
return PQ
	On effectue n produits par termes de P, donc a une complexité en $\mathcal{O}\left(n^2\right)$

En réalité, il existe un algorithme plus efficace pour calculer un produit de polynômes, appelé Fast Fourier Transform, et celui-ci fonctionne en $\mathcal{O}(n \log n)$.

Algorithme	Analyse
Input $P = (a_0, \dots, a_n)$, x Calculer les puissances de x jusqu'à n Calculer $a_i x^i$ **return** Somme des résultats	De manière naïve, on calcule x^i en temps $\mathcal{O}(i)$. On a alors une complexité en $\mathcal{O}(n^2)$. Sans rentrer dans les détails, on peut calculer x^i en temps $\log(i)$. On fait donc un nombe d'opérations en $\mathcal{O}(n \log n)$.

Proposition 2.3: Evaluation Rapide de Horner

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = (((a_n \times X + a_{n-1}) \times X + a_{n-2}) \dots + a_1) \times X + a_0$$

De ceci, on déduit un algorithme d'évaluation des polynômes en n multiplications et n additions.

3 Résolution des Equations

3.1 Formellement

Théorème 3.1: Solution des Equations Affines

L'unique solution de $ax + b = c$ avec $a \neq 0$ est $x = \frac{c-b}{a}$

Théorème 3.2: Solution des Equations Quadratiques

Les deux solutions de $ax^2 + bx + c = d$ avec $a \neq 0$ sont :

$$x_+ = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-d)}}{2a} \text{ et } x_- = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-d)}}{2a}$$

Celles-ci ne sont réelles que si $\sqrt{b^2 - 4a(c-d)} \geq 0$ et sont égales s'il y a égalité. Sinon, elles sont complexes conjuguées.

Théorème 3.3: Solutions des Cubiques et Quartiques

Il existe des formules pour les solutions des équations de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = e$ et $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = f$ où $a \neq 0$. Ces racines ne sont pas toujours réelles, mais une équation de degré trois a toujours une racine réelle.

Théorème 3.4: Klein Vierergruppe

Il ne peut pas exister de formule pour les solutions des équations polynômiales de degré ≥ 5.

Théorème 3.5: des Valeurs Intermédiaires

- Formulation Réelle : Si f est continue sur un intervalle, son image est un intervalle.
- Formulation Générale : Si f est continue sur le connexe par arcs X, son image est connexe par arcs.

En pratique cela signifie que si :

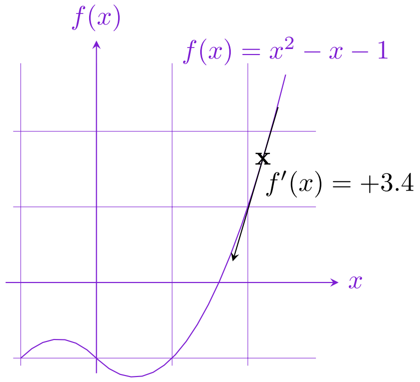
$$f(a) = c, f(b) = d \text{ alors } \forall y \in [c, d], \exists x, f(x) = y$$

Théorème 3.6: Caractérisation de Carathéodory

Une fonction est dérivable en x_0 si et seulement si il existe un nombre noté $f'(x_0)$ tel que, au voisinage de x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

En particulier, les polynômes sont dérivables, donc si on cherche une racine x_0, on peut, en suivant la pente, trouver une racine.
Si $f(x) > 0$ et on va selon x croissant si $f(x) < 0$ sinon x décroissant et à l'inverse sinon.



On vérifie bien qu'on va trouver une racine en

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Il y en a une autre en

$$\overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Toutefois, cette méthode graphique nécessite de savoir tracer une fonction polynômiale.

Le package que j'utilise pour faire les figures étant buggé, je ne peux pas dessiner correctement l'orthogone de Lill ci-dessous.