Problèmes sur les Billards Convexes

Matthieu Boyer

Ce devoir est constitué de trois petits problèmes indépendants sur les thèmes abordés dans le dernier cours. Il sera à rendre au prochain cours, le 2 Mars. Vous n'êtes pas obligés de tout faire, mais essayez d'y réfléchir.

1 Compacité

On rappelle qu'une partie est compacte si et seulement si elle est fermée (toute suite convergente à valeurs dans X à sa limite dans X) et bornée (tous les éléments de X sont à une distance inférieure à un certain réel de 0). Une suite $(x_j = (x_{j,1}, \dots, x_{j,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^n$ converge si et seulement si toutes ses coordonées convergent.
On rappelle de plus que la norme d'un point $x = (x_1, \dots, x_n)$, ou sa distance à 0 est le nombre réel $\|x\| = \sum_{i=1}^n x_i^2$

Question 1.1. *Montrer que* $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 \leq 1\}$ *est compact.*

Question 1.2. *Montrer que* $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$ *est compact.*

On rappelle que la frontière ∂X d'une partie X est l'ensemble des points de X tel qu'il existe un point y hors de X à distance $\|x - y\| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Question 1.3. *Montrez que* $\partial\mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$.

On rappelle que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de limite x, et si f est continue, alors $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$.

Question 1.4. *On se donne un compact K et une fonction continue f. Montrez que $f(K)$ est compact.*

On rappelle que si $f : A \to B$, on a $f^{-1}(B) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$

Question 1.5. [1] *Soit K un compact, et f une fonction continue.*

1. *Est-ce que $f^{-1}(K)$ est compact ?*
2. *Montrez que $f^{-1}(K)$ est fermé.*
3. *Que dire si f est bijective ? Que dire si f^{-1} est continue ?*

1. Cette question est plus difficile, vous pouvez quand même faire le 1. sans problème.

2 Convexité

On rappelle qu'une partie $\mathcal{C}$ est convexe si et seulement si

$$\forall x, y \in \mathcal{C}, [x, y] = \{tx + (1-t)y \mid t \in [0,1]\} \subseteq \mathcal{C}$$

Autrement dit, si les segments entre deux points sont inclus dans la partie considérée.
On rappelle qu'une fonction f est convexe si et seulement si

$$\forall x, y, f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

Si l'inégalité est inversée, on dit que f est concave.

Question 2.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrez que $\mathcal{C}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$ est convexe si et seulement si f est convexe.*

Question 2.2. *Soit f, g deux fonctions convexes.*

1. *Est-ce que* $\max(f, g)$ *est convexe ?*
2. *Est-ce que* $\min(f, g)$ *est convexe ?*

Question 2.3. *Soit f bijective strictement croissante convexe. C'est-à-dire que si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$. Etudiez la convexité de f^{-1}.*

On appelle enveloppe convexe de F l'ensemble $conv(F) = \{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, x_1, \ldots, x_n \in F^n\}$.

Question 2.4. [2] *On se donne un compact K.*

1. *Montrez que $\mathcal{H} = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n \mid \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1)\}$ est compact.*
2. *On admet que le produit $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$ de deux compacts est compact. Montrez que $\mathcal{H} \times K^n$ est compact.*
3. *Une fonction est polynômiale si elle a la forme d'une somme de produits de nombre. On admet que les applications polynômiales sont continues. Montrez que $conv(K)$ est convexe.*

3 Lois de Snell-Descartes

On rappelle les lois de Snell-Descartes :

Un rayon de lumière entrant depuis un milieu 1 d'indice optique n_1 dans un milieu n_2 avec un angle à la normale i_1 est réfléchi et réfracté selon les lois suivantes :

Réfraction : Son angle i_2 de sortie dans le milieu 2 vérifie

$$n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$$

Réflexion : Son angle i'_1 de réflexion dans le milieu 1 est tel que la normale au milieu au point d'incidence est la bissectrice de l'angle $i_1 + i'_1$.

Dans la suite, pour appuyer votre raisonnement, vous devrez faire un petit schéma (ou amender un schéma précédent) représentant la situation abstraite considérée. Vous trouverez les données pour des applications numériques en fin d'énoncé.

On plante une épingle dans un bouchon en liège en forme de disque de rayon a. On fait flotter le bouchon sur de l'eau, l'épingle vers le bas. L'épingle dépasse du bouchon d'une hauteur h.
On observe la situation depuis un point au dessus de l'eau. On rappelle que l'on peut voir un point si un rayon de lumière peut partir de l'oeil jusqu'au point considéré.

Question 3.1. *Représentez la situation générale. Prenez bien soin de rajouter toutes les variables utiles, indices des milieux et angle compris.*

Question 3.2. *A quelle condition sur l'angle d'incidence peut-on voir l'aiguille ?*

Question 3.3. *A quelle condition sur la hauteur de l'aiguille est-il impossible de la voir ?*

2. Cette question utilise la partie 1 dont on pourra admettre les résultats.