# Cours TalENS 2023-2024

## Inazuma Eleven, Puzzles, Angles Droits, Glissières

Matthieu Boyer

27 Janvier 2024

# Introduction Historique

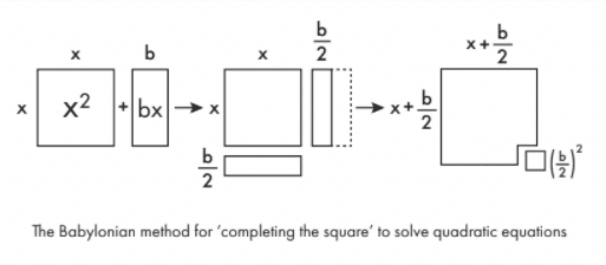



Figure – Source :
https://bigthink.com/hard-science/quadratic-formula-history/

# Introduction Historique


MS 3048
Table for solving cubic equations, in the Sumerian sexagesimal system.
Babylonia, ca. 19th c. BC

Figure – Source : https://www.schoyencollection.com/mathematics-collection/9-3-algebra/cubic-equations-table-ms-3048

# Introduction Historique

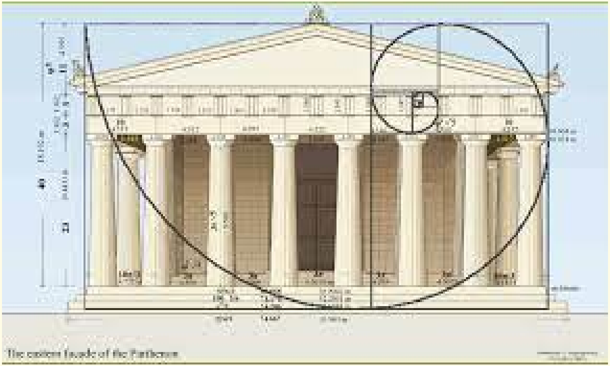



Figure – Source : https://qph.cf2.quoracdn.net/main-qimg-a210b13c4f479bb2d8a5e4d0f1757688-lq

# Plan

Formalisme !

Polynômes sur un Corps

Equations Polynômiales et Applications

Algorithmes

Résolution des Equations

# Le Corps

## Définition 2.1: Corps

Un corps est un ensemble muni :

# Le Corps

## Définition 2.1: Corps

Un corps est un ensemble muni :

- D'une addition avec un neutre $0$ notée $+ : (x, y) \mapsto x + y$

# Le Corps

## Définition 2.1: Corps

Un corps est un ensemble muni :

- D'une addition avec un neutre $0$ notée $+ : (x, y) \mapsto x + y$
- D'une multiplication avec un neutre $1$ notée $\times : (x, y) \mapsto xy$ distributive sur l'addition

# Le Corps

## Définition 2.1: Corps

Un corps est un ensemble muni :

- D'une addition avec un neutre $0$ notée $+ : (x, y) \mapsto x + y$
- D'une multiplication avec un neutre $1$ notée $\times : (x, y) \mapsto xy$ distributive sur l'addition

Pour laquelle tout élément (sauf $0$) est inversible pour la multiplication et la loi de produit nul est vérifiée.

# Le Corps

## Définition 2.1: Corps

Un corps est un ensemble muni :

- D'une addition avec un neutre $0$ notée $+ : (x, y) \mapsto x + y$
- D'une multiplication avec un neutre $1$ notée $\times : (x, y) \mapsto xy$ distributive sur l'addition

Pour laquelle tout élément (sauf $0$) est inversible pour la multiplication et la loi de produit nul est vérifiée.

On notera $\mathbb{K}$ un tel ensemble. $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} = \mathbb{F}_p$ sont des corps.

# Polynômes à une Indéterminée

**Définition 2.2: Polynôme sur $\mathbb{K}$**

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{K}$.

# Polynômes à une Indéterminée

**Définition 2.2: Polynôme sur $\mathbb{K}$**

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{K}$.

On les note sous la forme :

$$\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$$

# Polynômes à une Indéterminée

**Définition 2.2: Polynôme sur $\mathbb{K}$**

Un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite finie d'éléments de $\mathbb{K}$.

On appelle le symbole $X$ l'indéterminée. Ce n'est pas un nombre. On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. On appelle $d$ le degré de $P$.

# Calcul sur les Polynômes

## Proposition 2.1: Opérations

Si $P = \sum_{i=0}^{d_1} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{d_2} b_j X^j$ sont deux polynômes :

- $P + Q = \sum_{i=0}^{\max(d_1,d_2)} (a_i + b_i) X^i$ est un polynôme de degré $\leq \max(\deg P, \deg Q)$.

# Calcul sur les Polynômes

## Proposition 2.1: Opérations

Si $P = \sum_{i=0}^{d_1} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{d_2} b_j X^j$ sont deux polynômes :

- $P + Q = \sum_{i=0}^{\max(d_1,d_2)} (a_i + b_i) X^i$ est un polynôme de degré $\leq \max(\deg P, \deg Q)$.
- $X^k P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{i+k}$ est un polynôme.

# Calcul sur les Polynômes

## Proposition 2.1: Opérations

Si $P = \sum_{i=0}^{d_1} a_i X^i$ et $Q = \sum_{j=0}^{d_2} b_j X^j$ sont deux polynômes :

- $P + Q = \sum_{i=0}^{\max(d_1,d_2)} (a_i + b_i) X^i$ est un polynôme de degré $\leq \max(\deg P, \deg Q)$.
- $X^k P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^{i+k}$ est un polynôme.
- En particulier, $PQ$ est un polynôme de degré $\deg P + \deg Q$ et si $k \in \mathbb{N}$, $P^k$ est un polynôme.

# Calcul sur les Polynômes

## Définition 2.3: Composition

Pour $\alpha \in \mathbb{K}$, on note $P(\alpha) \in \mathbb{K}$ le nombre : $\sum_{i=0}^{d_1} a_i \alpha^i$. On note de plus $P \circ Q$ le polynôme

$$P \circ Q = \sum_{i=0}^{d_1} a_i Q(X)^i$$

On a $\deg P \circ Q = \deg P \times \deg Q$.

La fonction $\tilde{P} : \alpha \mapsto P(\alpha)$ est continue.

# Polynômes à Plusieurs Indéterminées

**Définition 2.4: Polynômes à Plusieurs Indéterminées**

Un polynôme à $k+1$ indéterminées est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_k]$

# Polynômes à Plusieurs Indéterminées

**Définition 2.4: Polynômes à Plusieurs Indéterminées**

Un polynôme à $k+1$ indéterminées est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}[X_1, \ldots, X_k]$

**Remarque 2.1: Intégrité**

En réalité, $\mathbb{K}[X]$ n'est pas un corps, mais seulement un anneau intègre.

# Polynômes à Plusieurs Indéterminées

**Définition 2.4: Polynômes à Plusieurs Indéterminées**

Un polynôme à $k+1$ indéterminées est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}[X_1, \dots, X_k]$

$P$ se met sous la forme

$$P(X) = \sum_{i_1=0}^{d_1} \sum_{i_2=0}^{d_2} \dots \sum_{i_k=0} \alpha_{i_1,\dots,i_k} X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_k^{i_k}$$

# Plan

# Equation Polynômiale

## Définition 2.5: Equation Polynômiale

Une équation polynômiale est une équation de la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = b$$

# Equation Polynômiale

## Définition 2.5: Equation Polynômiale

Une équation polynômiale est une équation de la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = b$$

On peut se restreindre au cas $b = 0$ en enlevant $b$ à $P$.

# Equation Polynômiale

## Définition 2.5: Equation Polynômiale

Une équation polynômiale est une équation de la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = b$$

On peut se restreindre au cas $b = 0$ en enlevant $b$ à $P$.

On appelle *racines* de l'équation les éléments de $\{\alpha \mid P(\alpha) = b\}$. On dit que $d = \deg P$ est le degré de l'équation.

# Equation Polynômiale

## Définition 2.5: Equation Polynômiale

Une équation polynômiale est une équation de la forme

$$P(x) = \sum_{i=0}^{d} a_i x^i = b$$

Pour $k$ indéterminées, on remplace $x$ par un $k$-uplets $x_1, \ldots, x_k$

# Solutions à une Équation Polynômiale

**Proposition 2.1: Nombres de Solution**

Une équation définie par $P$ a au plus $\deg P$ solutions

# Solutions à une Équation Polynômiale

**Proposition 2.1: Nombres de Solution**

Une équation définie par $P$ a au plus $\deg P$ solutions

**Théorème 2.1: D'Alembert Gauss**

Une équation polynômiale définie par $P$ a toujours exactement $\deg P$ solutions sur un corps algébriquement clos. $\mathbb{C}$ est algébriquement clos.

# Applications I

## Définition 2.6: Droite

Une droite est un ensemble de la forme $D(a, b) = \{ax + b \mid x \in \mathbb{R}\}$

# Applications I

## Définition 2.6: Droite

Une droite est un ensemble de la forme $D(a,b) = \{ax + b \mid x \in \mathbb{R}\}$

En particulier, si on a deux droites $D(a,b), D(a',b')$, leur intersection est définie par l'ensemble

$$\left\{ax + b = a'x + b'\right\} = \left\{(a - a')x + (b - b') = 0\right\}$$

# Applications II

**Définition 2.7: Cercle**

Un cercle est un ensemble de la forme $C((x_0, y_0), r) = \left\{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2\right\}$

De la même manière que pour les droites, on peut vérifier que les points à l'intersection de deux cercles sont solutions d'une équation polynomiale.

# Plan

Formalisme !

Algorithmes

- Analyse des Algorithmes
- Algorithmes sur les Polynômes

Résolution des Equations

# Notion de Complexité

**Définition 3.1: Complexité**

On appelle complexité en temps d'un algorithme le nombre d'opérations nécessaires à l'effectuer.

La complexité est une notion de vitesse d'un algorithme.

# Notion de Complexité

**Définition 3.1: Complexité**

On appelle complexité en temps d'un algorithme le nombre d'opérations nécessaires à l'effectuer.

La complexité est une notion de vitesse d'un algorithme.

**Définition 3.2: Notation de Landau**

On dit que $u_n = \mathcal{O}(v_n)$ si il existe $c$ tel que $\frac{u_n}{v_n} \leq c$ pour tout $n$.

La notation `grand O` est une notion de vitesse de croissance.

# Quelques Exemples

## Proposition 3.1: Croissances Comparées

- On a $\alpha^n = \mathcal{O}\left(\beta^n\right)$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$

# Quelques Exemples

## Proposition 3.1: Croissances Comparées

- On a $\alpha^n = \mathcal{O}\left(\beta^n\right)$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$
- On a $n^\alpha = \mathcal{O}\left(n^\beta\right)$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$

# Quelques Exemples

## Proposition 3.1: Croissances Comparées

- On a $\alpha^n = \mathcal{O}\left(\beta^n\right)$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$
- On a $n^\alpha = \mathcal{O}\left(n^\beta\right)$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$
- A l'inverse $n^\alpha = \mathcal{O}\left(n^\beta\right)$ avec $\alpha \leq \beta \leq 0$

# Quelques Exemples

## Proposition 3.1: Croissances Comparées

- On a $\alpha^n = \mathcal{O}\left(\beta^n\right)$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$
- On a $n^\alpha = \mathcal{O}\left(n^\beta\right)$ si $0 \leq \alpha \leq \beta$
- A l'inverse $n^\alpha = \mathcal{O}\left(n^\beta\right)$ avec $\alpha \leq \beta \leq 0$
- On a $\log n \leq n^\alpha$ si $\alpha > 0$.

# Propriétés

## Proposition 3.2: Opérations

Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$

# Propriétés

**Proposition 3.2: Opérations**

Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$

- Si $v_n = \mathcal{O}\left(w_n\right)$ on a $u_n = \mathcal{O}(w_n)$

# Propriétés

## Proposition 3.2: Opérations

Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$

- Si $v_n = \mathcal{O}\left(w_n\right)$ on a $u_n = \mathcal{O}(w_n)$
- $\lambda u_n = \mathcal{O}(v_n) = \mathcal{O}(\lambda v_n)$

# Propriétés

## Proposition 3.2: Opérations

Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$

- Si $v_n = \mathcal{O}(w_n)$ on a $u_n = \mathcal{O}(w_n)$
- $\lambda u_n = \mathcal{O}(v_n) = \mathcal{O}(\lambda v_n)$
- Si $w_n = \mathcal{O}(z_n)$ on a : $u_n + w_n = \mathcal{O}(v_n + z_n)$.

# Propriétés

## Proposition 3.2: Opérations

Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$

- Si $v_n = \mathcal{O}\left(w_n\right)$ on a $u_n = \mathcal{O}(w_n)$
- $\lambda u_n = \mathcal{O}(v_n) = \mathcal{O}(\lambda v_n)$
- Si $w_n = \mathcal{O}(z_n)$ on a : $u_n + w_n = \mathcal{O}(v_n + z_n)$.
- $u_n = \mathcal{O}(u_n)$.

# Plan

# Algorithmes Simples

| Algorithme | Analyse |
|---|---|
| **Input** $P = (a_0, \ldots, a_n)$,<br>$Q = (b_i, \ldots, b_n)$<br>Calculer les puissances de $x$ jusqu'à $n$<br>Calculer $a_i x^i$<br>**return** Somme des résultats | On effectue $n$ additions, on a une complexité en $\mathcal{O}(n)$. |

# Algorithmes Simples

| Algorithme | Analyse |
|---|---|
| **Input** $P = (a_0, \ldots, a_n)$<br>$Q = (b_i, \ldots, b_n)$ | |
| Calculer les puissances de $x$ jusqu'à $n$<br>Calculer $a_i x^i$<br>**return** Somme des résultats | On effectue $n$ produits par puissance, donc a une complexité en $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ |

# Algorithmes Simples

| Algorithme | Analyse |
|---|---|
| **Input** $P = (a_0, \ldots, a_n)$<br>$Q = (b_i, \ldots, b_n)$ | |
| Calculer les puissances de $x$ jusqu'à $n$<br>Calculer $a_i x^i$<br>**return** Somme des résultats | On effectue $n$ produits par puissance, donc a une complexité en $\mathcal{O}\left(n^2\right)$ |

En réalité, il existe un algorithme plus efficace pour calculer un produit de polynômes, appelé Fast Fourier Transform, et celui-ci fonctionne en $\mathcal{O}(n \log n)$.

# Evaluation Naïve

| Algorithme | Analyse |
|---|---|
| **Input** $P = (a_0, \ldots, a_n)$, $x$ | |
| Calculer les puissances de $x$ jusqu'à $n$<br>Calculer $a_i x^i$<br>**return** Somme des résultats | De manière naïve, on calcule $x^i$ en temps $\mathcal{O}(i)$. On a alors une complexité en $\mathcal{O}(n^2)$. |

# Evaluation Naïve

| Algorithme | Analyse |
|---|---|
| **Input** $P = (a_0, \ldots, a_n)$, $x$<br>Calculer les puissances de $x$ jusqu'à $n$<br>Calculer $a_i x^i$<br>**return** Somme des résultats | Sans rentrer dans les détails, on peut calculer $x^i$ en temps $\log(i)$. On fait donc un nombe d'opérations en $\mathcal{O}(n \log n)$. |

# Algorithme de Horner

**Proposition 3.3: Evaluation Rapide de Horner**

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = (((a_n \times X + a_{n-1}) \\ \times X + a_{n-2}) \\ \ldots + a_1) \times X + a_0$$

# Algorithme de Horner

**Proposition 3.3: Evaluation Rapide de Horner**

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = (((a_n \times X + a_{n-1}) \\ \times X + a_{n-2}) \\ \ldots + a_1) \times X + a_0$$

De ceci, on déduit un algorithme d'évaluation des polynômes en $n$ multiplications et $n$ additions !

# Plan

# Degrés 1 et 2

**Théorème 4.1: Solution des Equations Affines**

L'unique solution de $ax + b = c$ avec $a \neq 0$ est $x = \frac{c-b}{a}$

# Degrés 1 et 2

**Théorème 4.1: Solution des Equations Affines**

L'unique solution de $ax + b = c$ avec $a \neq 0$ est $x = \frac{c-b}{a}$

**Théorème 4.2: Solution des Equations Quadratiques**

Les deux solutions de $ax^2 + bx + c = d$ avec $a \neq 0$ sont :

$x_+ = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a(c-d)}}{2a}$ et $x_- = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4a(c-d)}}{2a}$

Celles-ci ne sont réelles que si $\sqrt{b^2 - 4a(c-d)} \geq 0$ et sont égales s'il y a égalité. Sinon, elles sont complexes conjuguées.

# Degrés $3$, $4$ et plus

**Théorème 4.3: Solutions des Cubiques et Quartiques**

Il existe des formules pour les solutions des équations de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = e$ et $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = f$ où $a \neq 0$. Ces racines ne sont pas toujours réelles, mais une équation de degré trois a toujours une racine réelle.

# Degrés $3$, $4$ et plus

**Théorème 4.3: Solutions des Cubiques et Quartiques**

Il existe des formules pour les solutions des équations de la forme $ax^3 + bx^2 + cx + d = e$ et $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = f$ où $a \neq 0$. Ces racines ne sont pas toujours réelles, mais une équation de degré trois a toujours une racine réelle.

**Théorème 4.4: Klein Vierergruppe**

Il ne peut pas exister de formule pour les solutions des équations polynômiales de degré $\geq 5$.

# Plan

# Théorème des Valeurs Intermédiaires

**Théorème 4.5: des Valeurs Intermédiaires**

- Formulation Réelle : Si $f$ est continue sur un intervalle, son image est un intervalle.

# Théorème des Valeurs Intermédiaires

## Théorème 4.5: des Valeurs Intermédiaires

- Formulation Réelle : Si $f$ est continue sur un intervalle, son image est un intervalle.
- Formulation Générale : Si $f$ est continue sur le connexe par arcs $X$, son image est connexe par arcs.

# Théorème des Valeurs Intermédiaires

**Théorème 4.5: des Valeurs Intermédiaires**

- Formulation Réelle : Si $f$ est continue sur un intervalle, son image est un intervalle.
- Formulation Générale : Si $f$ est continue sur le connexe par arcs $X$, son image est connexe par arcs.

En pratique cela signifie que si :

$$f(a) = c, f(b) = d \text{ alors } \forall y \in [c, d], \exists x, f(x) = y$$

# Méthode de Newton-Raphson

**Théorème 4.6: Caractérisation de Carathéodory**

Une fonction est dérivable en $x_0$ si et seulement si il existe un nombre noté $f'(x_0)$ tel que, au voisinage de $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

# Méthode de Newton-Raphson

**Théorème 4.6: Caractérisation de Carathéodory**

Une fonction est dérivable en $x_0$ si et seulement si il existe un nombre noté $f'(x_0)$ tel que, au voisinage de $x_0$ :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

En particulier, les polynômes sont dérivables, donc si on cherche une racine $x_0$, on peut, en suivant la pente, trouver une racine.

# Méthode de Newton-Raphson

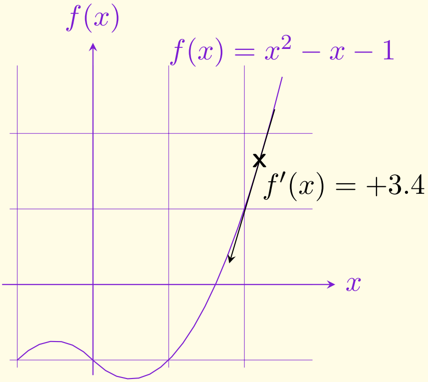
**Théorème 4.6: Caractérisation de Carathéodory**

Une fonction est dérivable en $x_0$ si et seulement si il existe un nombre noté $f'(x_0)$ tel que, au voisinage de $x_0$ :

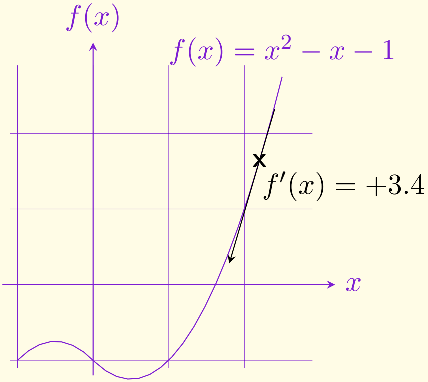
$$f(x) = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$$

En particulier, les polynômes sont dérivables, donc si on cherche une racine $x_0$, on peut, en suivant la pente, trouver une racine. Si $f(x) > 0$ et on va selon $x$ croissant si $f(x) < 0$ sinon $x$ décroissant et à l'inverse sinon.

# Méthode de Newton-Raphson Graphique



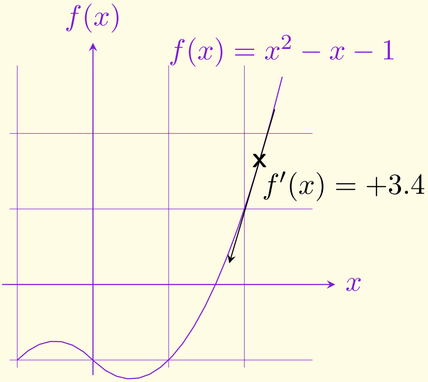
# Méthode de Newton-Raphson Graphique




On vérifie bien qu'on va trouver une racine en

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

# Méthode de Newton-Raphson Graphique




On vérifie bien qu'on va trouver une racine en

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Il y en a une autre en

$$\overline{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Toutefois, cette méthode graphique nécessite de savoir tracer une fonction polynômiale.