Cours TalENS 2023-2024

Goûters, Socialisme, Chaleur et PB&J

Matthieu Boyer

16 Décembre 2023

Vie en Communauté

Placez vous dans la situation suivante :

Vie en Communauté

Placez vous dans la situation suivante :

- Avec plusieurs de vos amis, vous avez décidé de faire un gâteau.

Vie en Communauté

Placez vous dans la situation suivante :

- Avec plusieurs de vos amis, vous avez décidé de faire un gâteau.
- Une fois celui-ci cuit, vient le moment de le découper.

Vie en Communauté

Placez vous dans la situation suivante :

- Avec plusieurs de vos amis, vous avez décidé de faire un gâteau.
- Une fois celui-ci cuit, vient le moment de le découper.
- Cependant, vous n'avez pas tous aussi faim les uns que les autres.

Vie en Communauté

Placez vous dans la situation suivante :

- Avec plusieurs de vos amis, vous avez décidé de faire un gâteau.
- Une fois celui-ci cuit, vient le moment de le découper.
- Cependant, vous n'avez pas tous aussi faim les uns que les autres.
- Comment faire pour le découper sans que personne ne soit lésé et que le découpeur ne soit assailli pour ses préférences dans le groupe d'amis.

Vie en Communauté

Vous apprendrez plus tard dans votre vie, qu'en réalité, l'application la plus utile de ce que nous allons voir est en réalité une application au découpage de nouilles.

Modélisation

On modélise l'ensemble des mangeurs de gâteau par le segment d'entier $[\![1, n]\!]$

Modélisation

On modélise l'ensemble des mangeurs de gâteau par le segment d'entier $[\![1, n]\!]$
On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de ce segment d'entier.

Modélisation

On modélise l'ensemble des mangeurs de gâteau par le segment d'entier $\llbracket 1, n \rrbracket$
On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de ce segment d'entier.
On représente la faim du mangeur i par une mesure de probabilité μ_i de densité f_i.

Modélisation

On modélise l'ensemble des mangeurs de gâteau par le segment d'entier $[\![1, n]\!]$
On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de ce segment d'entier.
On représente la faim du mangeur i par une mesure de probabilité μ_i de densité f_i.
On cherche une partition $X_1, \ldots, X_n$ du gâteau, que l'on modélise par l'ensemble $[0, 1]$.

Equitabilité du Partage

On a plusieurs manières de juger de la manière de couper le gâteau :

Equitabilité du Partage

On a plusieurs manières de juger de la manière de couper le gâteau :

- Proportionellement : $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$

Equitabilité du Partage

On a plusieurs manières de juger de la manière de couper le gâteau :

- Proportionellement : $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$
- Exactement : $\forall i \forall j, \mu_i(X_j) = \frac{1}{n}$

Equitabilité du Partage

On a plusieurs manières de juger de la manière de couper le gâteau :

- Proportionellement : $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$
- Exactement : $\forall i \forall j, \mu_i(X_j) = \frac{1}{n}$
- Sans Avarice : $\forall i, \forall j, \mu_i(X_i) \geq \mu_i(X_j)$

Equitabilité du Partage

On a plusieurs manières de juger de la manière de couper le gâteau :

- Proportionellement : $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$
- Exactement : $\forall i \forall j, \mu_i(X_j) = \frac{1}{n}$
- Sans Avarice : $\forall i, \forall j, \mu_i(X_i) \geq \mu_i(X_j)$
- Equitablement : $\forall i, \forall j, \mu_i(X_i) = \mu_j(X_j)$

Equitabilité du Partage

On a plusieurs manières de juger de la manière de couper le gâteau :

- Proportionellement : $\forall i \in [\![1, n]\!], \mu_i(X_i) \geq \frac{1}{n}$
- Exactement : $\forall i \forall j, \mu_i(X_j) = \frac{1}{n}$
- Sans Avarice : $\forall i, \forall j, \mu_i(X_i) \geq \mu_i(X_j)$
- Equitablement : $\forall i, \forall j, \mu_i(X_i) = \mu_j(X_j)$

On choisit ici de s'intéresser au partage Équitable du gâteau, mais des résultats existent sur les autres types de partage.

Théorème de Partage de Nouilles

Theorem (De Partage de Nouilles)

Pour toutes fonctions de densités f_i et permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on considère le système $(\star)$ suivant :

$$\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x)\mathrm{d}x = \ldots = \int_{x_n}^{1} f_{\sigma(n)}(x)\mathrm{d}x \qquad (\star)$$

Celui-ci a une solution.

Théorème de Partage de Nouilles

Theorem (De Partage de Nouilles)

Pour toutes fonctions de densités f_i et permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on considère le système $(\star)$ suivant :

$$\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x)\mathrm{d}x = \ldots = \int_{x_n}^{1} f_{\sigma(n)}(x)\mathrm{d}x \qquad (\star)$$

Celui-ci a une solution.

On cherche donc à démontrer ce Théorème.

Partitions

On appelle partition d'un ensemble toute sous division de cet ensemble en plusieurs parties sans recouvrement.

Partitions

Formellement, pour un ensemble X, il s'agit d'un ensemble $(X_i)_{i\in I}$ tel que :

$$\bigcup_{i\in I} X_i = X \text{ et } X_i \cap X_j = \varnothing$$

Partitions

Formellement, pour un ensemble X, il s'agit d'un ensemble $(X_i)_{i \in I}$ tel que :

$$\bigcup_{i \in I} X_i = X \text{ et } X_i \cap X_j = \varnothing$$

Par exemple, $\{\{1,3\},\{2,4\}\}$ est une partition de $[\![1,4]\!]$

Partitions

Formellement, pour un ensemble X, il s'agit d'un ensemble $(X_i)_{i\in I}$ tel que :

$$\bigcup_{i\in I} X_i = X \text{ et } X_i \cap X_j = \varnothing$$

Dans le cas de $[0,1]$ on dénote une partition comme une suite strictement croissante de réels $x_1, \ldots, x_n$ de sorte qu'on *découpe* l'intervalle en plus petits intervalles.

Permutations

On appelle permutation d'un ensemble, toute manière de le réordonner.

Permutations

Formellement, il s'agit d'une bijection d'un ensemble et dans lui-même, puisqu'il s'agit juste de renommer chaque élément.

Permutations

Formellement, il s'agit d'une bijection d'un ensemble et dans lui-même, puisqu'il s'agit juste de renommer chaque élément. On note souvent les permutations entre parenthèses : $(1\ 2\ 3)$ est une permutation de l'ensemble $[\![1, 3]\!]$ mais aussi de $[\![1, 4]\!]$.

Permutations

Formellement, il s'agit d'une bijection d'un ensemble et dans lui-même, puisqu'il s'agit juste de renommer chaque élément.
On note souvent les permutations entre parenthèses : $(1\ 2\ 3)$ est une permutation de l'ensemble $[\![1, 3]\!]$ mais aussi de $[\![1, 4]\!]$.
Dans le cas de l'ensemble $[\![1, n]\!]$, on note l'ensemble de ses permutations $\mathfrak{S}_n$ et on l'appelle Groupe Symétrique d'ordre n. Il est de cardinal $n!$ (c'est beaucoup)

Modélisation

Ici, on représente le gâteau de manière continue par le segment $[0, 1]$. On dit que c'est une description continue du problème puisque l'ensemble considéré n'est pas dénombrable.

Modélisation

Ici, on représente le gâteau de manière continue par le segment $[0, 1]$. On dit que c'est une description continue du problème puisque l'ensemble considéré n'est pas dénombrable.
Puisque la faim de chacun ne dépend pas de la position autour de la table, on doit pouvoir résoudre le problème, quel que soit l'ordre des mangeurs, i.e. quelle que soit la permutation de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ des mangeurs.

Modélisation

Ici, on représente le gâteau de manière continue par le segment $[0, 1]$. On dit que c'est une description continue du problème puisque l'ensemble considéré n'est pas dénombrable.
Puisque la faim de chacun ne dépend pas de la position autour de la table, on doit pouvoir résoudre le problème, quel que soit l'ordre des mangeurs, i.e. quelle que soit la permutation de l'ensemble $[\![1, n]\!]$ des mangeurs.
On cherche alors une partition du gâteau, i.e. du segment $[0, 1]$, dépendant de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ des mangeurs.

Théorie de la Mesure

On appelle mesure μ sur un ensemble E une application d'une tribu $\mathcal{A}$ de l'ensemble de ses parties à valeurs positives qui vérifie certaines propriétés :

Théorie de la Mesure

On appelle mesure μ sur un ensemble E une application d'une tribu $\mathcal{A}$ de l'ensemble de ses parties à valeurs positives qui vérifie certaines propriétés :

- $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$

Théorie de la Mesure

On appelle mesure μ sur un ensemble E une application d'une tribu $\mathcal{A}$ de l'ensemble de ses parties à valeurs positives qui vérifie certaines propriétés :

- $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$
- $\mu(\varnothing) = 0$

Théorie de la Mesure

De ces propriétés de base on en déduit quelques propriétés :

Théorie de la Mesure

De ces propriétés de base on en déduit quelques propriétés :

- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$

Théorie de la Mesure

De ces propriétés de base on en déduit quelques propriétés :

- $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$
- Si $A \subseteq B$: $\mu(A) \leq \mu(B)$ et $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$

Quelques Mesures

Voici quelques mesures déjà connues :

- La mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}))$: $\mu(A) = |A|$

Quelques Mesures

Voici quelques mesures déjà connues :

- La mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}))$: $\mu(A) = |A|$
- La mesure de Dirac en x sur $(E, \mathcal{A})$ quelconque :

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Quelques Mesures

Voici quelques mesures déjà connues :

- La mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathbb{P}(\mathbb{N}))$: $\mu(A) = |A|$
- La mesure de Dirac en x sur $(E, \mathcal{A})$ quelconque :
$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
- La mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: $\lambda\left([a, b]\right) = b - a$

Mesure de Probabilité

Une mesure de probabilité p sur un univers (un ensemble Ω) est une mesure sur les parties de cet univers (les évènements) de masse totale 1.

Mesure de Probabilité

Une mesure de probabilité p sur un univers (un ensemble Ω) est une mesure sur les parties de cet univers (les évènements) de masse totale 1.
L'application de cette fonction à un évènement représente la probabilité de celui-ci. On peut généraliser la propriété sur l'union ci-dessus à un nombre dénombrable d'évènements.

Densité

Dans le cas d'une mesure de probabilité p sur un ensemble continu, on dit qu'elle est non-atomique lorsque $p(\{x\}) = 0$.

Densité

Dans le cas d'une mesure de probabilité p sur un ensemble continu, on dit qu'elle est non-atomique lorsque $p(\{x\}) = 0$.
On dit de plus qu'elle est à densité lorsqu'il existe une fonction μ_p telle que :

$$\forall A \subseteq \Omega, p(A) = \int_A \mu_p \,\mathrm{d}\lambda$$

où λ correspond *intuitivement* à la taille de l'ensemble A puisqu'en particulier $\lambda([a, b]) = b - a$.

Modélisation

Supposons notre gâteau hétérogène (mettons, un gâteau marbré). Chacun de nos mangeurs ayant sa préférence, on représente leur appétance pour les parties du gâteau par une mesure de probabilité à densité sur ce gâteau.

Modélisation

Supposons notre gâteau hétérogène (mettons, un gâteau marbré). Chacun de nos mangeurs ayant sa préférence, on représente leur appétance pour les parties du gâteau par une mesure de probabilité à densité sur ce gâteau.

La part que l'un de nos mangeurs va manger est alors, par définition de l'intégrale par rapport à une mesure :

$$\mu_i(X_i) = \int_{X_i} f_i \,\mathrm{d}\mu_i$$

Modélisation

Intuitivement, c'est une somme (C'est une vision très physicienne/historique de l'intégrale) sur chaque petite portion du gâteau de l'appétance du mangeur i pour cette portion.

Borsuk-Ulam ?

Theorem (Borsuk-Ulam)

Si f est une fonction continue sur une sphère de dimension n à valeurs dans un espace euclidien de dimension n, il existe deux points antipodaux sur cette sphère de même image par f.

Autrement dit, à isomorphisme près :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0\left(S^n, \mathbb{R}^n\right),\ \exists x_0 \in S^n,\ f(x_0) = f(-x_0)$$

Catégorie de Lusternick-Schnirelmann

Definition

On définit la Catégorie de Lusternick-Schnirelmann d'un espace X noté $\mathrm{cat}(X)$ comme le nombre minimal (moins 1) d'ensembles ouverts contractables en un point suffisant à le recouvrir.

Catégorie de Lusternick-Schnirelmann

Theorem (Catégorie des Espaces Projectifs)

On a : cat$(\mathbb{R}P^n) = n$

Démonstration.

On a $H^\star(\mathbb{R}P^n; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2\left[X_1\right] / \left(x_1^{n+1}\right)$. Donc cup$(\mathbb{R}P^n) = n$ et comme on a toujours : cup$(X) \leq$ cat$(X) \leq \dim(X)$ d'où :
$n =$ cup$(\mathbb{R}P^n) \leq$ cat$(\mathbb{R}P^n) \leq \dim(\mathbb{R}P^n) = n$ ∎

Lusternick-Schnirelmann et Borsuk-Ulam

Theorem (Lusternick-Schnirelmann)

Si S^n est recouvert par des ensembles ouverts $C_0, \ldots, C_{n-1}$, alors au moins l'un d'entre eux contient des points antipodaux.

Lusternick-Schnirelmann et Borsuk-Ulam

Theorem (Lusternick-Schnirelmann)

Si S^n est recouvert par des ensembles ouverts $C_0, \ldots, C_{n-1}$, alors au moins l'un d'entre eux contient des points antipodaux.

On en déduit assez immédiatement le théorème de Borsuk-Ulam.

Lusternick-Schnirelmann et Borsuk-Ulam

Démonstration.

Supposons qu'aucun ne contiennent de points antipodaux. Soit $A_i \subseteq B^{n+1}$ l'ensemble fermé des rayons aux points de C_i. En notant la relation $\sim$ d'indentification de S^n aux antipodes, on a : $\mathbb{R}P^{n+1} = B^{n+1}/\sim$. Par hypothèse comme C_i n'a pas de points antipodaux, $A_i \hookrightarrow \mathbb{R}P^{n+1}$ est injective et donc, A_i se contractant en un point, $\mathbb{R}P^{n+1}$ est recouvert par $A_0, \ldots, A_{n-1}$, ce qui contredit le théorème précédent. ■

Une conséquence de Borsuk-Ulam

En physique, on considère que toutes les fonctions de l'espace (pression, température, humidité. . .) sont continues, dérivables et même à peu près tout ce dont on a envie.

Une conséquence de Borsuk-Ulam

En physique, on considère que toutes les fonctions de l'espace (pression, température, humidité...) sont continues, dérivables et même à peu près tout ce dont on a envie.
Mais, puisque toutes les sphères s'obtiennent par homothétie et translation les unes par rapport aux autres, le théorème de Borsuk-Ulam est valide sur toute sphère.

Une conséquence de Borsuk-Ulam

En physique, on considère que toutes les fonctions de l'espace (pression, température, humidité. . .) sont continues, dérivables et même à peu près tout ce dont on a envie.
Mais, puisque toutes les sphères s'obtiennent par homothétie et translation les unes par rapport aux autres, le théorème de Borsuk-Ulam est valide sur toute sphère.
Et, en physique, on connaît quelque chose qui ressemble très fortement à une sphère.

Une conséquence de Borsuk-Ulam

En physique, on considère que toutes les fonctions de l'espace (pression, température, humidité...) sont continues, dérivables et même à peu près tout ce dont on a envie.
Mais, puisque toutes les sphères s'obtiennent par homothétie et translation les unes par rapport aux autres, le théorème de Borsuk-Ulam est valide sur toute sphère.
Et, en physique, on connaît quelque chose qui ressemble très fortement à une sphère.
Ainsi, à tout instant, il existe sur Terre deux points antipodaux qui ont même pression, même température et même taux d'humidité.

Théorème de Partage de Nouilles

Theorem (De Partage de Nouilles)

Pour toutes fonctions de densités f_i et permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on considère le système $(\star)$ suivant :

$$\int_0^{x_1} f_{\sigma(1)}(x)\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} f_{\sigma(2)}(x)\mathrm{d}x = \ldots = \int_{x_n}^{1} f_{\sigma(n)}(x)\mathrm{d}x \qquad (\star)$$

Celui-ci a une solution.

Démonstration

Démonstration.
On ne va pas rentrer dans les détails d'une démonstration horriblement calculatoire. ∎

Démonstration

Démonstration.

On introduit les fonctions $(F_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}$ suivantes sur $S^{n-1} = \left\{e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n e_i^2 = 1\right\}$:

$$F_i(e) = \operatorname{sgn}(e_{i+1}) \times \int_{e_1^2+\cdots+e_i^2}^{e_1^2+\cdots+e_i^2+e_{i+1}^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\,\mathrm{d}x - \operatorname{sgn} e_1 \int_0^{e_1^2} f_{\sigma(1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

Démonstration

Démonstration.

On introduit les fonctions $(F_i)_{i\in[\![1,n-1]\!]}$ suivantes sur $S^{n-1} = \left\{e = (e_1,\ldots,e_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n e_i^2 = 1\right\}$:

$$F_i(e) = \operatorname{sgn}(e_{i+1}) \times \int_{e_1^2+\cdots+e_i^2}^{e_1^2+\cdots+e_i^2+e_{i+1}^2} f_{\sigma(i+1)}(x)\,\mathrm{d}x - \operatorname{sgn} e_1 \int_0^{e_1^2} f_{\sigma(1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

On définit alors $f(e) = (F_1(e),\ldots,F_{n-1}(e))$. Il est clair que f est continue et antipodale, donc par le Théorème de Borsuk-Ulam, elle est nulle en un certain point $\tilde{e}$.

Démonstration

Démonstration.

On définit alors $f(e) = (F_1(e), \ldots, F_{n-1}(e))$. Il est clair que f est continue et antipodale, donc par le Théorème de Borsuk-Ulam, elle est nulle en un certain point $\tilde{e}$.

On pose alors $x_0 = 0$ puis $x_i = x_{i-1} + \tilde{e}_i^2$ ∎

D'autres démonstrations

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Borsuk-Ulam se basant sur de nombreux domaines :

D'autres démonstrations

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Borsuk-Ulam se basant sur de nombreux domaines :

- Par la topologie algébrique : En réduisant le groupe fondamental (trivial) de la sphère (simplement connexe) à un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ en étudiant l'image d'un lacet de S^2 par $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$

D'autres démonstrations

Il existe de nombreuses démonstrations du théorème de Borsuk-Ulam se basant sur de nombreux domaines :

- Par la topologie algébrique : En réduisant le groupe fondamental (trivial) de la sphère (simplement connexe) à un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}$ en étudiant l'image d'un lacet de S^2 par $g(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{\|f(x)-f(-x)\|}$
- Par le Lemme de Tucker : Une triangulation antipodalement symétrique sur la boule contient une arête complémentaire. L'avantage de cette méthode étant qu'on connaît une démonstration algorithmique de ce lemme.

Des Corollaires

Le Théorème de Borsuk-Ulam est très, très, très utile, dans de nombreux domaines, notamment du fait de ses multiples démonstrations :

Des Corollaires

Le Théorème de Borsuk-Ulam est très, très, très utile, dans de nombreux domaines, notamment du fait de ses multiples démonstrations :

- Théorème de Point Fixe de Brouwer : Toute fonction continue de D^n dans D^n a un point fixe.

Des Corollaires

Le Théorème de Borsuk-Ulam est très, très, très utile, dans de nombreux domaines, notamment du fait de ses multiples démonstrations :

- Théorème de Point Fixe de Brouwer : Toute fonction continue de D^n dans D^n a un point fixe.
- Théorème du Sandwich au Jambon : Étant données n parties Lebesgue-Mesurables d'un espace de dimension n, il existe au moins un hyperplan affine divisant chaque parties en deux sous-ensembles de mesure égales.

Des Corollaires

Le Théorème de Borsuk-Ulam est très, très, très utile, dans de nombreux domaines, notamment du fait de ses multiples démonstrations :

- Théorème de Point Fixe de Brouwer : Toute fonction continue de D^n dans D^n a un point fixe.
- Théorème du Sandwich au Jambon : Étant données n parties Lebesgue-Mesurables d'un espace de dimension n, il existe au moins un hyperplan affine divisant chaque parties en deux sous-ensembles de mesure égales.
- Théorème de Lovász : Si le complexe de voisinage d'un graphe est k-connecté, alors $\chi(G) \geq k + 3$.

D'autres Applications

De parts ses nombreux corollaires, il a aussi de nombreuses applications :

D'autres Applications

De parts ses nombreux corollaires, il a aussi de nombreuses applications :

- La partie nulle du jeu de Hex n'existe pas. C'est une application du Théorème de Point Fixe de Brouwer.

D'autres Applications

De parts ses nombreux corollaires, il a aussi de nombreuses applications :

- La partie nulle du jeu de Hex n'existe pas. C'est une application du Théorème de Point Fixe de Brouwer.
- Le problème du collier dérobé a une solution en n coupes : Deux voleurs ont dérobé un collier fait de n types de perles et souhaitent le partager également en deux.

Coloration de Graphes

On parlera sans doute de ce sujet plus en détail dans un prochain cours, mais voici tout de même un résultat qui découle du théorème de Borsuk-Ulam :

Theorem

On peut partitionner les $\binom{n}{k}$ parties à k éléments d'un ensemble de n éléments en $n-2k+2$ classes de sorte que dans chacune des classes, on ne peut choisir deux sous-ensembles disjoints.
Autrement dit, si on note $KN(n,k)$ le graphe de ces parties, $\chi\left(KN(n,k)\right) = n-2k+2$.